# *Chapitre 14 – Fonctions Numériques*

## I – Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

### 1. Définitions

*Définition* :

Une fonction à valeurs réelles est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

*Définition* :

On dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a avec $a \in \bar{I}$ si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert J, centré en a si $a \in \mathbb{R}$ ou de la forme $]c;+\infty[$ si $a=+\infty$ ou $]-\infty;c[$ si $a=-\infty$.

*Définition* :

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative ou représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ quand x décrit I.

### 2. Opérations

On définit les opérations suivantes sur $\mathbb{R}^I$ : $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$ :

- *Somme* : $f+g$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto f(x)+g(x)$.
- *Produit* : $f \times g$ (ou fg) est la fonction définie sur I, $x \mapsto f(x)g(x)$.
- *Produit par un nombre* : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto \lambda f(x)$.
- *Inverse* : Si $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, $1/f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto 1/f(x)$.
- *Quotient* : Si $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, $g/f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto g(x)/f(x)$.
- *Composée* : Si $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in \mathbb{R}^J$ et $f(I) \subset J$, la composée $g \circ f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto g(f(x))$.
- *Valeur absolue* : $|f|$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto |f(x)|$.

*Propriétés* :

$(\mathbb{R}^I,+,\times)$ est un anneau commutatif non intègre et $(\mathbb{R}^I,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

### 3. Relation d'ordre

*Propriété et définition* :

On définit aussi sur $\mathbb{R}^I$ la relation suivante : $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$, $f \leq g$ ssi $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.

Cette relation définie ci-dessus est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{R}^I$.

*Définition* :

Soit $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$. On peut définit les deux fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ par :

$$\inf(f,g) : x \mapsto \min\big(f(x), g(x)\big) \text{ et } \sup(f,g) : x \mapsto \max\big(f(x), g(x)\big).$$

*Propriété* :

$\forall (f,g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$, $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.

## 4. Fonctions majorées, minorées, bornées

*Définition* :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
On dit que f est majorée (*resp.* minorée) s'il existe un réel μ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \le \mu$ (*resp.* $f(x) \ge \mu$).
On dit que μ est un majorant (*resp.* minorant) de f ou encore que f est majorée (*resp.* minorée) par μ.

On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée.

*Propriété* :

$(\mathcal{B}(I,\mathbb{R}),+,\times,.)$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{R}^I,+,\times,.)$ (sous-espace vectoriel et sous-anneau).

*Définitions* :

Soit $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. La borne supérieure (*resp.* inférieure) de f est la borne supérieure (*resp.* inférieure) de f(I). Elle est notée $\sup_I f$ ou $\sup_{x\in I} f(x)$ (*resp.* $\inf_I f$ ou $\inf_{x\in I} f(x)$).

## 5. Extremum

*Définitions* :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. On dit que :

- f(a) est le maximum (*resp.* minimum) global de f si $\forall x \in I,\ f(x) \le f(a)$ (*resp.* $f(x) \ge f(a)$).
- f(a) est le maximum (*resp.* minimum) local de f si $f(x) \le f(a)$ (*resp.* $f(x) \ge f(a)$) au voisinage de a.
- Si f(a) est le maximum ou le minimum global (*resp.* local) de f, on dit que f(a) est un extremum global (*resp.* local) de f.
- Si f(a) est un extremum de f sur I, on dit qu'il est atteint en a.

## 6. Monotonie

*Définitions* :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
f est croissante (*resp.* décroissante) sur I si $\forall (x,x') \in I^2,\ x \le x' \Rightarrow f(x) \le f(x')$ (*resp.* $f(x') \le f(x)$).

f est strictement croissante (*resp.* strictement décroissante) sur I si $\forall (x,x') \in I^2,\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ (*resp.* $f(x') < f(x)$).

f est (strictement) monotone sur I si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I.

*Propriétés (immédiates)* :

- Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^I$ (strictement) monotones sur I de même sens de variation, alors :
  - ► $f+g$ est (strictement) monotone sur I et de même sens de variation que f et g.
  - ► Si f et g sont *positives* sur I alors fg est (strictement) monotone sur I, de même sens de variation que f et g.
- Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ avec $f(I) \subset J$.
  - ► Si f et g sont (strictement) monotones de même sens, $g \circ f$ est (strictement) croissante.
  - ► Si f et g sont (strictement) monotones de sens contraires, $g \circ f$ est (strictement) décroissante.

## 7. Parité – Imparité

*Définitions* :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
On dit que f est paire (*resp.* impaire) si I est centré en 0 et $\forall\, x \in I$, $f(-x) = f(x)$ (*resp.* $f(-x) = -f(x)$).

*Propriété* :

$\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^I$.

*Propriétés* :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^I$.

- Si f et g sont paires, alors fg est paire et si $f \circ g$ est définie, elle est paire.
- Si f et g sont impaires, alors fg est paire et si $f \circ g$ est définie, elle est impaire.
- Si f est paire et g impaire (ou vice-versa), alors fg est impaire et si $f \circ g$ est définie, elle est impaire.

## 8. Périodicité

a. Définition :

*Définitions* :

Soient $f \in \mathbb{R}^A$ où A est une partie de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}^*$.
On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $x \in A \Leftrightarrow x + T \in A$ et $\forall\, x \in A$, $f(x+T) = f(x)$.
On dit alors que f est périodique de période T ou T-périodique.

*Propriété* :

L'ensemble des périodes d'une fonction périodique muni de + est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

b. Périodicité et opérations :

*Propriété* :

Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Si on appelle $\mathscr{F}_T$ l'ensemble des fonctions T-périodiques sur A, alors $(\mathscr{F}_T, +, \times, .)$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{R}^A, +, \times, .)$ (sous-espace vectoriel et sous-anneau).

*Propriété* :

Si f est T-périodique sur A et $g \in \mathbb{R}^B$ avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est T-périodique sur A.

## 9. Fonctions lipschitziennes

*Définition* :

Soient $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que f est lipschitzienne si $\exists\, k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\, (x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$.
On dit alors que f est k-lipschitzienne.

*Propriété* :

Si on appelle $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I, alors $(\mathscr{L}, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^I, +, .)$.

# II – Limites

## 1. Limite finie

a. Définitions :

*Définitions* :

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ définie au voisinage de $a \in \bar{I}$ et un réel $\ell$.

- Si a est fini, on dit que f admet $\ell$ pour limite au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si a est fini, on dit que f admet $\ell$ pour limite à droite au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ a \leq x \leq a + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si a est fini, on dit que f admet $\ell$ pour limite à droite à gauche au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ a - \alpha \leq x \leq a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $a = +\infty$, on dit que f admet $\ell$ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $a = -\infty$, on dit que f admet $\ell$ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x \leq -A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

b. Premières propriétés :

*Propriété* :

Si une fonction admet une limite finie en un point alors cette limite est unique.

*Notations* :

- Cette propriété permet de noter la limite : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$.
- Si $\lim\limits_{a} f = \ell$ et $f(x) \geq \ell$ (*resp.* $f(x) \leq \ell$) au voisinage de a, on note $\lim\limits_{a} f = \ell^+$ (*resp.* $\lim\limits_{a} f = \ell^-$)
- Pour une limite à droite (*resp.* à gauche), on note :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{a^+} f = \ell \ (\textit{resp. } \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{a^-} f = \ell).$$

*Propriété* :

Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \bar{I}$ est bornée au voisinage de a.

*Propriété* :

Toute fonction admettant une limite strictement positive en $a \in \bar{I}$ est minorée, au voisinage de a, par un nombre réel strictement positif.

## 2. Limite infinie

*Définitions* :

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ définie au voisinage de $a \in \bar{I}$.

- Si a est fini, on dit que f admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour limite au point a si :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) > A \ (\textit{resp. } f(x) < -A).$$

- Si $a=+\infty$, on dit que <u>f admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour limite en $+\infty$</u> si :
$$\forall A>0,\ \exists A>0 \text{ tel que } \forall x\in I,\ x\geq A \Rightarrow f(x)>A \ (\textit{resp. } f(x)<-A).$$
- Si $a=-\infty$, on dit que <u>f admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour limite en $-\infty$</u> si :
$$\forall A>0,\ \exists A>0 \text{ tel que } \forall x\in I,\ x\leq -A \Rightarrow f(x)>A \ (\textit{resp. } f(x)<-A).$$

## 3. <u>Opérations sur les limites</u>

a. <u>Fonctions de limite nulle</u> :

*<u>Propriétés</u>* :

- $f(x)\to 0 \Leftrightarrow |f|(x)\to 0$.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^I$ de limite nulle en a est un sev de $\mathbb{R}^I$ stable par produit.

*<u>Propriété</u>* :

Le produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction de limite nulle en a est de limite nulle en a.

*<u>Corollaire</u>* :

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^I$ de limite nulle en a est stable par produit.

b. <u>Fonctions de limite finie quelconque</u> :

*<u>Propriété</u>* :

Si $f(x)\to\ell$ quand $x\to a$ alors $|f(x)|\to|\ell|$ que $x\to a$.

*<u>Propriété</u>* :

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^I$ admettant une limite finie en a est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^I$.
De plus, si $\lim\limits_a f=\ell$ et $\lim\limits_a g=\ell'$, alors $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lim\limits_a(\lambda f+\mu g)=\lambda\ell+\mu\ell'$ et $\lim\limits_a fg=\ell\ell'$.

*<u>Propriété</u>* :

- Si f ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim\limits_a f=\ell\neq 0$, alors $\lim\limits_a \frac{1}{f}=\frac{1}{\ell}$.
- Si f ne s'annule pas au voisinage de a, $\lim\limits_a f=\ell\neq 0$ et $\lim\limits_a g=\ell'$, alors $\lim\limits_a \frac{g}{f}=\frac{\ell'}{\ell}$.

*<u>Propriété</u>* :

Soient $f\in\mathbb{R}^I$ telle que $\lim\limits_a f=b\in\overline{\mathbb{R}}$ et g est définie sur J tel que $f(I)\subset J$ telle que $\lim\limits_b g=\ell\in\mathbb{R}$.
Alors, $\lim\limits_a g\circ f=\ell$.

c. <u>Fonctions de limite infinie</u> :

*<u>Propriété</u>* :

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

- Si $\lim\limits_a f=\pm\infty$, alors $\lim\limits_a |f|=+\infty$.
- Si $\lim\limits_a f=+\infty$ (*resp.* $-\infty$) et g bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_a(f+g)=+\infty$ (*resp.* $-\infty$).

- Si $\lim_a f = \pm\infty$, g de signe constant et $|g|$ est bornée par deux réels strictement positifs au voisinage de a, alors $\lim_a fg = \pm\infty$ (suivant les signes de f et g : voir le tableau).
- Si $\lim_a f = b \in \overline{\mathbb{R}}$ et g est définie sur J tel que $f(I) \subset J$ telle que $\lim_a g = +\infty$ (*resp.* $-\infty$), alors $\lim_a g \circ f = +\infty$ (*resp.* $-\infty$).
- Pour les autres opérations, voir le tableau.

### 4. <u>Limites et relation d'ordre</u>

*<u>Propriété</u>* :

Si $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_a g = \ell' \in \mathbb{R}$ avec $f \leq g$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \ell'$.

*<u>Propriété</u>* :

Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim_a g = 0$, alors $\lim_a f = 0$.

<u>Corollaire</u> : *Théorème des gendarmes.*

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim_a h = \lim_a g = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_a f = \ell$.

*<u>Propriété</u>* :

Si $g(x) \leq f(x)$ au voisinage de a et $\lim_a g = +\infty$, alors $\lim_a f = +\infty$.

### 5. <u>Limites et monotonie</u>

*<u>Théorème</u>* :

Soit f croissante sur I.

- Si $a \neq -\infty$ et f est définie et majorée au voisinage de $a^-$, alors $\lim_{a^-} f = \sup\{f(x), x \in I \cap ]-\infty;a[\} \in \mathbb{R}$.
- Si $a \neq -\infty$ et f définie et non majorée au voisinage de $a^-$, alors $\lim_{a^-} f = +\infty$.
- Si $a \neq +\infty$ et f est définie et minorée au voisinage de $a^+$, alors $\lim_{a^+} f = \inf\{f(x), x \in I \cap ]a;+\infty[\} \in \mathbb{R}$.
- Si $a \neq +\infty$ et f définie et non minorée au voisinage de $a^+$, alors $\lim_{a^+} f = -\infty$.

### 6. <u>Limites et suites</u>

*<u>Propriété</u>* :

Si $\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes dans I de limite a, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

*<u>Propriété</u>* : *Caractérisation séquentielle d'une limite.*

$\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ l'image par f de toute suite réelle à termes dans I et de limite a, a pour limite $\ell$.

### 7. <u>Limites et représentation graphique</u>

- Si $\lim_{+\infty} f = \ell$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $y = \ell$ pour asymptote horizontale en $+\infty$. Idem en $-\infty$.

- Si a est finie et $\lim_a f = \pm\infty$ ou $\lim_{a^+} f = \pm\infty$ ou $\lim_{a^-} f = \pm\infty$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $x = a$ pour asymptote verticale.
- Si il existe deux réels finis a et b tels que $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $y = ax+b$ pour asymptote oblique en $+\infty$. Idem en $-\infty$.

  Pour déterminer une éventuelle asymptote oblique en $+\infty$, la méthode est la suivante :
  - Evaluer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.
  - Si cette limite vaut a fini, alors évaluer $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$.
  - Si cette limite vaut b fini, alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

## III – Relations de comparaison

Dans tout ce qui suit, on considère $a \in \bar{I}$ et f et g deux fonctions définies sur I telle que g ne s'annule pas sur I privé de a (le cas échéant).

### 1. Domination, négligeabilité

*Définitions* :

- On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe une fonction u définie sur I et bornée au voisinage de a telle que $f = ug$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} O\left(g(x)\right)$.
- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur I et de limite nulle en telle que $f = \varepsilon g$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} o\left(g(x)\right)$.

*Propriétés* :

- $f \underset{a}{=} O(g) \iff \frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
- $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0$

*Propriété* :

$f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$. La réciproque est fausse.

*Propriétés* :

- Les relations $\underset{a}{O}$ et $\underset{a}{o}$ sont transitives.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$) alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{=} O(\lambda g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$).
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$) alors $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} o(g)$).
- $f \underset{a}{=} O(g)$ alors pour toute fonction h ne s'annulant pas au voisinage de a, $fh \underset{a}{=} O(gh)$. Idem avec o.
- $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$ où $g_1$ et $g_2$ ne s'annulent pas au voisinage de a $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$. Idem avec o.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$) et f ne s'annule pas au voisinage de a, $\frac{1}{g} \underset{a}{=} O\left(\frac{1}{f}\right)$ (*resp.* $\frac{1}{g} \underset{a}{=} o\left(\frac{1}{f}\right)$).

## 2. Equivalence

*Définition* :

On dit que f est <u>équivalente</u> à g au voisinage de a s'il existe une fonction $\varepsilon$ de limite 1 en a telle que, $f = \varepsilon g$ au voisinage de a. On note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

*Propriété* :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + \underset{a}{o}(g) \iff \lim_{a} \frac{f}{g} = 1.$$

*Propriétés* :

La relation $\underset{a}{\sim}$ est réflexive, symétrique et transitive.

*Propriétés* :

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et h est une fonction ne s'annulant pas au voisinage de a alors :

- f et g sont de même signe au voisinage de a.
- Si g admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, f aussi.
- $g = \underset{a}{O}(h)$ (*resp.* $g = \underset{a}{o}(h)$), alors $f = \underset{a}{O}(h)$ (*resp.* $f = \underset{a}{o}(h)$).
- Si $h = \underset{a}{O}(g)$ (*resp.* $h = \underset{a}{o}(g)$), alors $h = \underset{a}{O}(f)$ (*resp.* $h = \underset{a}{o}(f)$).

*Propriétés* :

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$.
- Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, les fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_2}{f_1} \underset{a}{\sim} \frac{g_2}{g_1}$.

## 3. Comparaison des fonctions usuelles

*Propriétés* :

Soient trois réels non nuls $\alpha$, $\beta$ et $a > 0$.

- Si $0 < a < 1$, alors $a^x = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$ et si $a > 1$, alors $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(a^x)$.
- Si $\alpha < 0$, alors $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left((\ln x)^\beta\right)$ et si $\alpha > 0$, alors $(\ln x)^\beta = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$.
- Si $0 < a < 1$, alors $a^x = \underset{+\infty}{o}\left((\ln x)^\beta\right)$ et si $a > 1$, alors $(\ln x)^\beta = \underset{+\infty}{o}(a^x)$.
- Si $\alpha < \beta$, $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(x^\beta)$.

*Propriétés* :

Soient deux réels non nuls $\alpha$ et $\beta$.

- Si $\alpha < \beta$, $|x|^\beta = \underset{0}{o}(|x|^\alpha)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $x^\alpha = \underset{0^+}{o}\left(|\ln x|^\beta\right)$ et si $\alpha < 0$, alors $|\ln x|^\beta = \underset{0^+}{o}(x^\alpha)$.

## 4. Exemples simples de développements limités d'ordre 1

*Propriété* :

Si f est une fonction dérivable en 0, on a $f(x) = f(0) + f'(0)x + \underset{0}{o}(x)$.

*Applications* :

- $\ln(1+x) = x + \underset{0}{o}(x)$.
- $e^x = 1 + x + \underset{0}{o}(x)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{0}{o}(x)$.
- $\sin x = x + \underset{0}{o}(x)$, $\tan x = x + \underset{0}{o}(x)$ et $\cos x = 1 + o(x)$.
- $\mathrm{sh}\, x = x + \underset{0}{o}(x)$, $\mathrm{th}\, x = x + \underset{0}{o}(x)$ et $\mathrm{ch}\, x = 1 + \underset{0}{o}(x)$.
- Pour cos et ch, on a même : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{0}{o}(x^2)$ et $\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{0}{o}(x^2)$ (*DL d'ordre 2*).

## IV – Continuité

Dans ce qui suit, on considère une fonction $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$.

### 1. Définition

*Définitions* :

- On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue à droite (*resp.* à gauche) en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (*resp.* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$).
- On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

*Notation* : On note $\mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues en a (*resp.* sur I) et à valeurs réelles.

*Propriété* :

Si f est lipschitzienne sur I, alors elle est continue sur I.

### 2. Continuité et opérations

*Propriétés* :

- $\mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ munis des opérations usuelles sont des $\mathbb{R}$-algèbres commutatives.
- Si f est continue en a (*resp.* sur I), $|f|$ l'est aussi.
- Quand il est défini, le quotient de 2 fonctions continues en a (*resp.* sur I) est continu en a (*resp.* sur I).
- Quand elle est définie, la composée de deux fonctions continues est continue.
- Si f et g sont continues en a (*resp.* sur I), alors $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues en a (*resp.* sur I).

### 3. Restriction et prolongement

*Propriétés* :

Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et J un intervalle inclus dans I. La restriction de f à J est continue sur J.

*Définitions* :

Soit $b \in \bar{I} \setminus I$ fini. Si f admet une limite finie $\ell$ en b, on dit que f se prolonge par continuité en b.

Dans ce cas, on appelle prolongement par continuité de f la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f} : I \cup \{b\} \to \mathbb{R} \,;\, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = b \end{cases}$$

### 4. Image continue d'un intervalle – Théorème des valeurs intermédiaires

*Théorème* :

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

*Corollaire* : *Théorème des valeurs intermédiaires.*

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $[a;b] \subset I$.

Tout réel compris entre f(a) et f(b) admet au moins un antécédent dans $[a;b]$ par f.

### 5. Image continue d'un segment

*Théorème* :

Si $f \in \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$, alors $f\left([a;b]\right)$ est un segment. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

### 6. Bijection continue

On note ici $I = | a ; b |$ avec $|$ = ] ou [, a fini ou $a = -\infty$ et b fini ou $b = +\infty$.

*Propriété* :

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est strictement croissante (*resp.* décroissante) sur I, alors $A = \lim_{a} f$ et $B = \lim_{b} f$ existent (éventuellement infinies) et $f(I) = | A ; B |$ (*resp.* $| B ; A |$), ouvert en A si I est ouvert en a, fermé en A si I est fermé en a, ouvert en B si I est ouvert en b, fermé en B si I est fermé en b.

*Propriété* :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ strictement monotone sur I et telle que $J = f(I)$ est un intervalle. Alors, f est une bijection continue de I dans J.

*Théorème* : *de la bijection continue.*

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est strictement monotone sur I, alors elle est bijective de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque est continue sur J.

*Propriété* :

Si f est une fonction bijective de I dans $J = f(I)$, alors les représentions graphiques de f et $f^{-1}$ dans un repère orthonormé sont symétrique par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$.

## V – Application aux suites récurrentes

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Comme $f(I) \subset I$, une récurrence immédiate prouve que la suite u est bien définie. L'étude de u repose sur celles de f et de g définie par $g(x) = f(x) - x$ (surtout, du signe de $g(x)$). Néanmoins, on peut avoir certains résultats directement :

*Propriété* :

Si f est bornée, u l'est aussi.

*Propriété* :

Si f est croissante sur I, alors u est monotone. Plus précisément, si $u_0 \leq u_1$, u est croissante et si $u_0 \geq u_1$, u est décroissante.

Si f est décroissante sur I, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Plus précisément :

- si $u_0 \leq u_2$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- si $u_0 \geq u_2$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

*Propriété* :

Si u converge vers $\ell \in I$ et f est continue en $\ell$, alors $\ell$ est un point fixe de f, soit $f(\ell) = \ell$.

# VI – Extension aux fonctions à valeurs complexes

## 1. Généralités

*Définition* :

Une fonction à valeurs complexes est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

*Définition* :

Soit $f \in \mathbb{C}^I$ une fonction à valeurs complexe. On a appelle partie réelle de f, notée $\mathrm{Re}(f)$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Re}[f(x)]$, partie imaginaire de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Im}[f(x)]$, fonction conjuguée de f, notée $\bar{f}$, la fonction $x \mapsto \overline{f(x)}$ et module de f, notée $|f|$, la fonction $x \mapsto |f(x)|$.

*Définition* :

Soit f une fonction complexe. On dit que f est bornée si $|f|$ l'est.

*Propriété* :

$(\mathcal{B}(I,\mathbb{C}),+,\times,.)$ est une sous-algèbre de $(\mathbb{C}^I,+,\times,.)$ (sous-espace vectoriel et sous-anneau).

## 2. Limites et continuité

Dans ce qui suit, on considère une fonction $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in \bar{I}$.

*Définitions* :

Soit un nombre complexe $\ell$.

Si a est fini, on dit que f admet $\ell$ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

On dit que f admet $\ell$ pour limite en $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x > A\ (\textit{resp. } x < -A) \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Si $a \in I$, on dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

*Propriété* :

Si f admet une limite finie en a alors :

- cette limite est unique et on la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.
- f est bornée au voisinage de a.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.

*Propriété* :

- $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{a} \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$.
- $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \overline{f} = \overline{\ell}$.

*Propriétés* :

Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{a} f = \ell$ et $\lim\limits_{a} g = \ell'$.

- $\lim\limits_{a} (f+g) = \ell + \ell'$.
- $\lim\limits_{a} fg = \ell\ell'$.
- Si $\ell' \neq 0$ alors g ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ (en particulier, $\lim\limits_{a} \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\ell'}$).
- Si $h \in \mathbb{R}^J$ avec $h(J) \subset I$, $a \in \overline{J}$, $\lim\limits_{a} h = b$ avec $b \in \overline{h(J)}$ et $\lim\limits_{b} f = \ell$, alors $\lim\limits_{a} f \circ h = \ell$.

*Propriété* :

$\mathcal{C}_a(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ munis des opérations usuelles sont des $\mathbb{C}$-algèbres commutatives, stables par passage au quotient.