# *Corrigé du DS n° 5*

## *Exercice 1*

1) Remarquons que :

$$f^2 - f\circ g + f - \mathrm{id}_E = 0 \iff f^2 - f\circ g + f = \mathrm{id}_E \iff f\circ(f - g + \mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E \iff f\circ h = \mathrm{id}_E$$

avec $h = f - g + \mathrm{id}_E$.

Alors, $\forall\, x \in E$, on a $x = f\circ h(x) = f\big(h(x)\big) \in \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Im} f = E$, ce qui prouve que f est surjective.

Or, E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, donc :

$$\boxed{\text{f est bijective.}}$$

Comme $f\circ h = \mathrm{id}_E$, on a $f^{-1}\circ f\circ h = f^{-1}\circ \mathrm{id}_E$, soit $h = f^{-1}$ et ainsi :

$$\boxed{f^{-1} = f - g + \mathrm{id}_E}$$

2) $f^{-1} = f - g + \mathrm{id}_E$, on a $g = f - f^{-1} + \mathrm{id}_E$.

Or, f commute avec f, $f^{-1}$ et $\mathrm{id}_E$ donc avec $f - f^{-1} + \mathrm{id}_E$. Ainsi :

$$\boxed{\text{f et g commutent.}}$$

3) a. Si f est une symétrie, alors on a $f^{-1} = f$ et donc $g = f - f^{-1} + \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si f est une symétrie, alors } g = \mathrm{id}_E.}$$

b. Si f est une homothétie de rapport $\lambda$ non nul, soit $f = \lambda \mathrm{id}_E$, alors $f^{-1}$ est l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$ et $f^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}_E$. Alors, $g = f - f^{-1} + \mathrm{id}_E = \lambda\mathrm{id}_E - \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}_E + \mathrm{id}_E = \dfrac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda}\mathrm{id}_E$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Si f est une homothétie de rapport } \lambda \neq 0\text{, alors g est l'homothétie de rapport } \frac{\lambda^2+\lambda-1}{\lambda}.}$$

c. Soit f une affinité de rapport $\lambda$ non nul, de base F et de direction G.

Si on note p la projection sur F parallèlement à G et $q = \mathrm{id}_E - p$, le projecteur associé à p, on a $f = p + \lambda q$.

On a $pq = qp = p - p^2 = 0$ et si $u = p + \dfrac{1}{\lambda}q$, on a :

$$f\circ u = (p + \lambda q)\circ\left(p + \frac{1}{\lambda}q\right) = p^2 + \lambda qp + \frac{1}{\lambda}pq + q^2 = p + q = \mathrm{id}_E.$$

De même, $u \circ f = id_E$ donc f est bijective de réciproque u, c'est-à-dire l'affinité de rapport $\frac{1}{\lambda}$, de base F et de direction G. Alors :

$$g = f - f^{-1} + id_E = p + \lambda q - p - \frac{1}{\lambda} q + id_E = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} q + id_E = p + q + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} q = p + \frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda} q .$$

Donc :

Si f est une affinité de rapport $\lambda \neq 0$, g est l'affinité de rapport $\frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda}$, de même base et même direction que f.

***Exercice 2***

1) Soit $x \in \operatorname{Im} g \cap \ker f$. On a alors $x = g(z)$ avec $z \in E$ et $f(x) = 0_F$.

Or, $g = g \circ f \circ g$ donc :

$$x = g(z) = g \circ f \circ g(z) = g \circ f\big(g(z)\big) = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(0_F) = 0_E .$$

Ainsi, $\forall x \in \operatorname{Im} g \cap \ker f$, on a $x = 0_E$ donc :

$$\underline{\operatorname{Im} g \cap \ker f = \{0_E\}} .$$

Supposons que $E = \operatorname{Im} g + \ker f$. Alors $\forall x \in E$, on a $x = g(z) + x_f$ avec $z \in E$ et $f(x_f) = 0_F$.

- En appliquant f, on obtient : $f(x) = f \circ g(z) + f(x_f) = f \circ g(z)$.
- En appliquant g, on obtient : $g \circ f(x) = g \circ f \circ g(z) = g(z)$.

Donc, $g(z) = g \circ f(x)$ et $x_f = x - g(z) = x - g \circ f(x)$.

Réciproquement, $\forall x \in E$, on peut écrire $x = g \circ f(x) + x - g \circ f(x)$, avec :

- $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im} g$.
- $f\big(x - g \circ f(x)\big) = f(x) - f \circ g \circ f(x) = 0_F$ car $f \circ g \circ f = f$, donc $x - g \circ f(x) \in \ker f$

Ainsi, tout x de E se décompose en la somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} g$ et d'une vecteur de $\ker f$ donc :

$$\underline{E = \operatorname{Im} g + \ker f} .$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{E = \operatorname{Im} g \oplus \ker f}$$

2) Si $E = \operatorname{Im} g \oplus \ker f$, alors $\dim E = rg(g) + \dim(\ker f)$, soit $rg(g) = \dim(\ker f) - \dim E$.

Par le théorème du rang, on a $\dim E = rg(f) + \dim(\ker f)$, soit $rg(f) = \dim(\ker f) - \dim E$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{rg(f) = rg(g)}$$

3) On a déjà clairement $\operatorname{Im} g \subset E$ donc $\underline{f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} f}$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im} f$. Il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$.

Or, $f = f \circ g \circ f$ donc $x = f \circ g \circ f(z) = f \circ g\big(f(z)\big) = f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$.

Comme $g(x) \in \operatorname{Im} g$, on a $x \in f(\operatorname{Im} g)$ et ainsi, $\underline{\operatorname{Im} f \subset f(\operatorname{Im} g)}$.

Finalement :

$$\boxed{f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f}$$

***Exercice 3***

1) On a $F \subset E$.

- $0_E$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ donc il est clair qu'elle s'annule en 0, donc $0_E \in F$ (et F est non vide).
- $\forall (f, g) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, posons $h = \lambda f + \mu g$.
  E étant un espace vectoriel, $h \in E$ et $h(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$ donc $h = \lambda f + \mu g \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E donc :

$$\boxed{F \text{ est } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

2) Dans l'énoncé, il est dit que φ est à images dans E (ceci est vrai car si f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f'$ et $x \mapsto x f(x)$ aussi donc $\varphi(f) \in E$).

- $\forall (f, g) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, posons $h = \lambda f + \mu g$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\varphi(h)(x) &= h'(x) - x h(x) \\
&= (\lambda f + \mu g)'(x) - x(\lambda f + \mu g)(x) \\
&= \lambda f'(x) + \mu g'(x) - \lambda x f(x) - \mu x g(x) \\
&= \lambda\big(f'(x) - x f(x)\big) + \mu\big(g'(x) - x g(x)\big) \\
&= \lambda \varphi(f)(x) + \mu \varphi(g)(x)
\end{aligned}$$

  Donc $\varphi(h) = \varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ et ainsi, <u>φ est linéaire</u>.

- Soit $g \in E$. On a $g = \varphi(f)$ si et seulement si f est une fonction de E vérifiant l'équation différentielle $(\mathsf{E}) : y' - x y = g$ et telle que $f(0) = 0$.

  L'équation $(\mathsf{E})$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Si on lui adjoint la condition initiale $f(0) = 0$, on obtient un problème de Cauchy dont on sait qu'il admet une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$. Cette solution dérivable f vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x f(x) + g(x)$ et si g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, une récurrence immédiate prouve que f l'est aussi, donc que $f \in F$ (car elle s'annule en 0).

  Ceci prouve que toute fonction $g \in E$ admet un unique antécédent par φ, donc que <u>φ est bijective</u>.

Finalement, φ est une application linéaire bijective de F dans E donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de F dans E.}}$$

3) Soit $g\in E$. On cherche $f=\varphi^{-1}(g)$.

Pour déterminer f, il faut résoudre effectivement le problème de Cauchy décrit dans la question précédente :

$$\begin{cases} f \text{ solution de } (E): y'-xy=g \\ f(0)=0 \end{cases}$$

Soit $(H): y'-xy=0$, l'équation homogène associée à $(E)$. Les solutions de $(H)$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto k\exp\left(\int^x t\,dt\right)=k\,e^{\frac{x^2}{2}}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

On cherche alors une solution particulière de $(E)$ par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire de la forme $x\mapsto k(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En réinjectant dans $(E)$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $k'(x)=g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Une solution particulière est donc la fonction $x\mapsto e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x g(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Les solutions de $(E)$ sont alors les fonctions de la forme $x\mapsto k\,e^{\frac{x^2}{2}}+e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x g(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ avec $k\in\mathbb{R}$. La solution f qui s'annule en 0 est telle que $k=0$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x g(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\varphi^{-1}: E\to F\,;\, g\mapsto\varphi^{-1}(g) \text{ telle que } \varphi^{-1}(g): x\mapsto e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x g(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt.}$$

***Exercice 4***

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>0$ donc :

$$\boxed{\text{La suite u est strictement croissante.}}$$

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]$, on a $k\le n$ donc $\frac{1}{\sqrt{k}}\ge\frac{1}{\sqrt{n}}$ et en sommant de $k=1$ à $k=n$, on obtient :

$$u_n\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, on obtient par comparaison :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall t\in[n,n+1]$, on a $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\frac{1}{\sqrt{t}}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$. Et, en intégrant sur $[n,n+1]$, on obtient :

$$\int_n^{n+1}\frac{dt}{\sqrt{n+1}}\le\int_n^{n+1}\frac{dt}{\sqrt{t}}\le\int_n^{n+1}\frac{dt}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\left[2\sqrt{t}\right]_n^{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}}\le 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Alors, en sommant membre à membre de 1 à n, on obtient (avec un télescopage au milieu), $\forall n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\le 2\sqrt{n+1}-2\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow u_{n+1}-1\le 2\sqrt{n+1}-2\le u_n.$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$2\sqrt{n+1}-2 \leq u_n \text{ et } u_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}-1.$$

La seconde inégalité se récrit $u_n \leq 2\sqrt{n}-1$ pour $n \geq 2$ et pour $n=1$, on a $2\sqrt{1}-1=1=u_1$ donc l'inégalité reste vraie. Finalement, on a bien $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{2\sqrt{n+1}-2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n}-1}$$

On a alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \leq 1-\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)=1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{2\sqrt{n}}=1$, soit :

$$\boxed{u_n \sim 2\sqrt{n}}$$

3) D'après ce qui précède, on a immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 2}$$

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ :

$$v_{n+1}-v_n = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(u_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)-\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)u_n$$

$$= \frac{1}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}u_n\right)$$

Or, on a vu que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq 2\sqrt{n}-1$ donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}(2\sqrt{n}-1).$$

Et :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}(2\sqrt{n}-1) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}}(2\sqrt{n}-1) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+n}+n-\sqrt{n+1}(2\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n}+n)} = \frac{n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n}+n)}$$

$$= \frac{(n+\sqrt{n+1})^2-(n^2+n)}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n}+n)(n+\sqrt{n+1}+\sqrt{n^2+n})}$$

$$= \frac{2n\sqrt{n+1}+1}{(n+\sqrt{n+1}+\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}\sqrt{n+1}} > 0$$

Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ :

$$v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{2n\sqrt{n+1}+1}{(n+\sqrt{n+1}+\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right) > 0$$

Donc :

$$\boxed{\text{La suite v est strictement croissante.}}$$

**_Exercice 5_**

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, la fonction $f_n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que différence de telles fonctions et en posant $a_n = \frac{1}{n}\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$, on a :

$$f_n\,'(x) = n(1-\text{th}^2(nx)) - 1 = n\left(\frac{n-1}{n} - \text{th}^2(nx)\right) = n\big(\text{th}(na_n)+\text{th}(nx)\big)\big(\text{th}(na_n)-\text{th}(nx)\big).$$

Comme la fonction th est positive sur $\mathbb{R}_+$, le signe de $f_n\,'(x)$ est celui de $\text{th}(na_n)-\text{th}(nx)$ sur $\mathbb{R}_+$ et on obtient le tableau :

| $x$ | $0$ | | $a_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n\,'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n$ | $0$ | $\nearrow$ | $f_n(a_n)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(nx) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

Sur $[0;a_n]$, $f_n$ est strictement croissante donc sur $]0;a_n]$, $f_n(x) > f_n(0) = 0 \Rightarrow f_n(x) \neq 0$.

Sur $[a_n;+\infty[$, $f_n$ est strictement décroissante, continue (car dérivable), $f_n(a_n) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$, donc le théorème de la bijection assure qu'il existe un unique réel $x_n \in\, ]a_n;+\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

Finalement :

$$\boxed{f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution strictement positive.}}$$

2) Remarquons que le tableau de variations de $f_n$ implique immédiatement que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) < 0$ si et seulement si $x > x_n$. Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a $f_n(1) = \text{th}(n) - 1 < 0$ (car $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\text{th}(x) < 1$) donc :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 2,\ x_n < 1.}$$

3) La fonction argth est définie et dérivable sur $]0;1[$ donc g l'est aussi en tant que quotient de telles fonctions et $\forall\, x \in\, ]0;1[$, on a $g'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1-x^2} - \operatorname{argth} x\right)$.

Posons $h(x) = \frac{x}{1-x^2} - \operatorname{argth} x$.

La fonction h est définie et dérivable sur $[0;1[$ en tant que différence de telles fonctions et :

$$h'(x)=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{1-x^2}=\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

$\forall\, x\in\,]0;1[$, $h'(x)>0$ donc h est strictement croissante sur $[0;1[$ et ainsi, $\forall\, x\in\,]0;1[$, $h(x)>h(0)=0$.

Comme sur $]0;1[$, $g'(x)$ est du signe de $h(x)$, on a $g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $]0;1[$ et :

- la fonction argth est dérivable en 0 et $\operatorname{argth} 0=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{argth} x-\operatorname{argth} 0}{x-0}=\operatorname{argth}'0=1$ ;
- $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{argth} x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$.

Enfin, g est continue (car dérivable) sur $]0;1[$ donc :

$$\boxed{\text{g réalise une bijection de } ]0;1[ \text{ dans } ]1;+\infty[.}$$

4) D'après les question 1 et 2, on a $\forall\, n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, $x_n\in\,]0;1[$ et :

$$f_n(x_n)=\operatorname{th}(nx_n)-x_n=0 \iff \operatorname{th}(nx_n)=x_n \iff \frac{\operatorname{argth} x_n}{x_n}=n \iff \underline{g(x_n)=n}.$$

Or, g est strictement croissante sur $]0;1[$, donc $\forall\,(x,x')\in\,]0;1[^2$, $x<x' \iff g(x)<g(x')$.

Ceci implique que $\forall\, n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, $g(x_n)=n<n+1=g(x_{n+1}) \iff x_n<x_{n+1}$. Ainsi :

$$\boxed{(x_n)_{n\geq 2} \text{ est strictement croissante.}}$$

5) D'après les question 2 et 4, la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite finie $\ell$.

Comme $x_2>0$ et $(x_n)_{n\geq 2}$ croissante, on a $\forall\, n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, $x_n\geq x_2$ donc $\ell\geq x_2>0$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{th}(nx_n)=\lim\limits_{X\to+\infty}\operatorname{th} X=1$. Or, on a $\operatorname{th}(nx_n)=x_n$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n=1}$$

6) Posons $\forall\, x\in\,]-1;1[$, $\varphi(x)=\operatorname{argth} x-\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\operatorname{argth} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$.

La fonction $\varphi$ est dérivable sur $]-1;1[$ en tant que somme de telles fonctions et :

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{1-x^2}=0.$$

Donc, $\varphi$ est constante sur $]-1;1[$ et $\varphi(0)=0$ donc $\varphi$ est nulle sur $]-1;1[$ et ainsi :

$$\boxed{\forall\, x\in\,]-1;1[,\ \operatorname{argth} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.}$$

7) a. On a vu que $\forall\, n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, $x_n\in\,]0;1[$ et $nx_n=\operatorname{argth} x_n$.

Avec la question précédente, on obtient $nx_n=\ln\sqrt{\dfrac{1+x_n}{1-x_n}}$ , soit :

$$nx_n=\frac{1}{2}\ln(1+x_n)-\frac{1}{2}\ln(1-x_n)\,.$$

Donc en posant $x_n=1-\varepsilon_n$, on a $\forall\, n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$ :

$$\boxed{n(1-\varepsilon_n)=\frac{1}{2}\ln(2-\varepsilon_n)-\frac{1}{2}\ln\varepsilon_n\,.}$$

b. La formule précédente se récrit $\forall\, n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$ :

$$\frac{\ln\varepsilon_n}{n}=\frac{\ln(2-\varepsilon_n)}{n}-2(1-\varepsilon_n)\,.$$

Donc :

$$\frac{\ln(n\varepsilon_n)}{n}=\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln\varepsilon_n}{n}=\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(2-\varepsilon_n)}{n}+2\varepsilon_n-2\,.$$

Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(2-\varepsilon_n)}{n}=0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n\varepsilon_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(2-\varepsilon_n)}{n}-2(1-\varepsilon_n)\right]=-2\,.$$

Alors, en écrivant $n\varepsilon_n=\exp\left(n\dfrac{\ln(n\varepsilon_n)}{n}\right)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{\ln(n\varepsilon_n)}{n}=-\infty$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\varepsilon_n=0}$$

c. En récrivant la formule de la question a. sous la forme $2n+\ln\varepsilon_n=2n\varepsilon_n+\ln(2-\varepsilon_n)$ et en passant à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2n+\ln\varepsilon_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(2n\varepsilon_n+\ln(2-\varepsilon_n)\right)=\ln 2\,.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{2n}\varepsilon_n=\lim_{n\to+\infty} e^{2n+\ln\varepsilon_n}=2\,.$$

Ce qui prouve que :

$$\boxed{\varepsilon_n\sim 2e^{-2n}}$$