

DS de Mathématiques n° 5

4 heures

Calculatrices interdites

Exercice 1

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$f^2 - f \circ g + f - \text{id}_E = 0.$$

1) Montrer que f est bijective et donner sa réciproque.

☺ On pourra introduire $h = f - g + \text{id}_E$.

2) Montrer alors que f et g commutent.

3) Déterminer g quand f est :

- a. une symétrie ;
- b. une homothétie de rapport non nul ;
- c. une affinité de rapport non nul.

☺ On pourra commencer par prouver que f est bijective et expliciter sa réciproque.

Exercice 2

Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que :

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

1) Montrer que $E = \text{Im } g \oplus \ker f$.

2) En déduire que $\text{rg}(f) = \text{rg}(g)$.

3) Montrer que $f(\text{Im } g) = \text{Im } f$.

Exercice 3

On appelle E l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} muni des lois usuelles $+$ et \cdot .

On pose $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ et φ l'application de E dans E qui à $f \in E$ associe $\varphi(f) : x \mapsto f'(x) - xf(x)$.

1) Montrer que F est \mathbb{R} -espace vectoriel.

2) Prouver que φ est un isomorphisme de F dans E .

3) Déterminer φ^{-1} .

Exercice 4

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- 1) Etudier la suite u (variations, limite).
- 2) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$ et en déduire un équivalent simple de u_n .
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$. Etudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (variations, limite).

Exercice 5

$\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose $f_n(x) = \operatorname{th}(nx) - x$.

- 1) Montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On notera cette solution x_n .
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $x_n < 1$.
- 3) On pose $g(x) = \frac{\operatorname{argth} x}{x}$. Montrer que g réalise une bijection de $]0;1[$ dans $]1;+\infty[$.
- 4) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $g(x_n) = n$ et en déduire le sens de variation de $(x_n)_{n \geq 2}$.
- 5) Justifier que $(x_n)_{n \geq 2}$ converge et déterminer sa limite.
- 6) Démontrer que $\forall x \in]-1;1[$, $\operatorname{argth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
- 7) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $x_n = 1 - \varepsilon_n$.
 - a. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $n(1 - \varepsilon_n) = \frac{1}{2} \ln(2 - \varepsilon_n) - \frac{1}{2} \ln \varepsilon_n$.
 - b. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n\varepsilon_n)}{n} = -2$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n = 0$.
 - c. En déduire un équivalent simple de ε_n .