TD du Chapitre 15 – Polynômes

Généralités

Exercice 1

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$ de degré n. Montrer que la famille $(P,P',P'',...,P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ les équations d'inconnue(s) P, Q, R (le cas échéant) :

a. $18P=P'P''$ où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P.
b. $P^2+Q^2=(X^2+1)^2$.
c. $P^2=X(Q^2+R^2)$.

Exercice 3

Soit $T:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]\,;P\mapsto(3X+8)P-(5X-X^2)P'+(X^2-X^3)P''$.

1) Montrer que T est un endomorphisme et déterminer les entiers n pour lesquels $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par T.
2) Déterminer les valeurs possibles de $\lambda\in\mathbb{R}$ et $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $T(P)=\lambda P$.
3) T est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 4

Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ (polynôme à coefficients entiers). Prouver que $\forall\, n\in\mathbb{Z}$, $P(n)$ divise $P\big(n+P(n)\big)$.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ et racines

Exercice 5

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans les différents cas suivants :

a. $P=X^6-4X^3+2X^2-1$ par $Q=X^2+4$.
b. $P=X^2+X$ par $Q=X^3+2X-1$.
c. $P=4X^3+X^2$ par $Q=X+1+i$.
d. $P=X^5+X+1$ par $Q=X^3-X^2+1$.
e. $P=X^n$ par $Q=X-1$.
f. $P=X^4-X+a$ et $Q=X^2-aX+1$ avec a réel. On donnera une CNS sur a pour que Q divise P.

Exercice 6

Soient $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ et $P\in\mathbb{K}[X]$. Déterminer le reste de division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$. On distinguera le cas où $a=b$.

Exercice 7

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$. Montrer que dans $\mathbb{C}[X]$, $\sin\theta\, X^n-\sin(n\theta)\,X+\sin[(n-1)\theta]$ est divisible par $X^2-2\cos\theta\, X+1$. L'est-il dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 8

Soient $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que les a_k sont deux à deux distincts.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall\, k \in [\![0;n]\!],\ L(a_k) = b_k$.

Le polynôme L *est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange*.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ et $Q = X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$.

Donner l'ordre de multiplicité de la racine 1 dans P, Q, $P+Q$ et PQ.

Exercice 10

Déterminer sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ la décomposition en facteurs irréductibles de P pour :

a. $P = X^4 - 4$.
b. $P = X^8 + 1$.
c. $P = X^3 + X^2 - 4X + 2$.
d. $P = X^4 - X^3 - X + 1$.

Factorisation

Exercice 11

Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrer que $P = Q = R$. Le résultat reste-t-il vrai dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 12

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}(x) \geq 0$. On veut prouver qu'il existe deux polynômes Q et R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q^2 + R^2$.

a. Montrer que les éventuelles racines réelles de P sont de multiplicité paire.
b. Montrer que si z est une racine complexe de P de multiplicité α, alors il en va de même pour $\overline{z}$.
c. Si A et B sont deux polynômes, simplifier $(A - iB)(A + iB)$ puis répondre au problème.
d. Reprendre la question b de l'exercice 2.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xyz + 4 = 0 \end{cases}$.