Chapitre 1 : Bases

I – Rudiments de logique

1. Vocabulaire

L'ensemble de Mathématiques est basé sur les *définitions*, une série d'*axiomes* et des *règles de logique* qui permettent de *démontrer ou prouver* certaines *propositions*. Il faut bien s'entendre sur le vocabulaire mathématique.

Définition : Une définition est l'explication de la nature d'une chose par l'énonciation de ses principaux attributs.

Proposition : Une proposition ou assertion est un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux.

Axiome : Proposition indiscutée, non démontrable, admise comme vraie, évidente.

Propriété : Ce qui est propre ou particulier à un objet mathématique. Couramment, une propriété mathématique est assimilée à une proposition démontrée vraie.

Lemme : Un lemme est une proposition démontrée vraie sur lequel s'appuie la démonstration d'un résultat plus important.

Théorème : Un théorème est une proposition qui doit être démontrée vraie. On utilise maintenant ce mot pour des résultats importants, majeurs.

Corollaire : Proposition qui se déduit immédiatement d'une proposition déjà démontrée.

2. Connecteurs logiques

a. Négation :

Définition :

Soit P une proposition. La négation de P est la proposition, notée non(P), qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

b. Conjonction et disjonction :

Définitions :

Soit P et Q deux propositions.

La conjonction de P et Q est la proposition « P et Q », notée $P \wedge Q$, qui est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément et fausse dans les autres cas.

La disjonction de P et Q est la proposition « P ou Q », notée $P \vee Q$, qui est vraie lorsque P ou Q (ou les deux) est vraie et fausse dans P et Q sont fausses.

c. Implication et équivalence :

Définitions :

Soient P et Q deux propositions.

On dit que P implique Q, noté $P \Rightarrow Q$, quand lorsque P est vraie alors Q l'est aussi. On dit alors que P vraie est une condition suffisante (CS) pour que Q soit vraie et que Q est vraie est une condition nécessaire (CN) pour que P le soit.

L'implication $Q \Rightarrow P$ est la réciproque de $P \Rightarrow Q$.

On dit que P est équivalente Q, noté $P \Leftrightarrow Q$, quand lorsque $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On dit alors que P vraie est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que Q soit vraie.

d. Contraposition :

Définition :

Soient P et Q deux propositions.

La (proposition) contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

3. Quantificateurs

Les deux quantificateurs mathématiques sont les symboles $\forall$ et $\exists$.

- Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit » .
- Le symbole $\exists$ se lit « il existe » .
- $\exists!$ se lit « il existe un unique » .

4. Modes de raisonnement

Hormis le raisonnement direct par simples implications ou équivalences, il existe d'autres types de raisonnement pour prouver un résultat.

a. Raisonnement par contre-exemple :

Pour prouver qu'un énoncé est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple (un seul suffit !). Ce type de réfutation s'applique à des propriétés du type « $\forall\, x \in E,\ P(x)$ ».

b. Raisonnement par contraposition :

Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, on prouve sa contraposée $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

c. Raisonnement par l'absurde :

Pour prouver qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse (c'est-à-dire que non(P) est vraie) et par une suite d'implications, on aboutit à une absurdité : une résultat impossible, faux.

d. Raisonnement par récurrence :

Théorème : Principe de récurrence.

> Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propriétés. Si :
> - $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_o} est vraie (*initialisation*) ;
> - $\forall\, n \geq n_o$, P_n est vraie $\Rightarrow$ P_{n+1} est vraie (*hérédité*) ;
>
> alors, $\forall\, n \geq n_o$, P_n est vraie.

Variantes :

- Récurrence double : Si P_{n_o} et P_{n_o+1} sont vraies (*initialisation*) et $\forall\, n \geq n_o$, P_n et P_{n+1} vraies $\Rightarrow$ P_{n+2} vraie (*hérédité*), alors P_n est vraie $\forall\, n \geq n_o$.
- Récurrence triple, quadruple,…
- Récurrence généralisée ou forte : Si P_{n_o} est vraie (*initialisation*) et $\forall\, n \geq n_o$, P_k vraie pour tout k compris entre n_o et n $\Rightarrow$ P_{n+1} vraie (*hérédité*), alors P_n est vraie $\forall\, n \geq n_o$.
- Récurrence finie : On peut appliquer le principe de récurrence à une suite finie de propriétés $(P_n)_{n\in[\![n_0,n_1]\!]}$ avec $n_0 < n_1$. Dans ce cas, dans l'étape d'hérédité, il faut supposer la propriété vraie à un rang n tel que $n_0 \leq n \leq n_1 - 1$, de manière à ce que $n+1$ soit bien compris entre n_0 et n_1.

e. Raisonnement par analyse-synthèse :

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode pour déterminer des solutions d'un problème. Elle se déroule en deux étapes.

Première étape : *l'analyse*.

On suppose que le problème admet au moins une solution et, par déductions, on détermine des propriétés que cette solution doit vérifier (des conditions nécessaires).

Seconde étape : *la synthèse*.

On examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats possibles à être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions (s'il y en a).

II – Ensembles

1. Généralités

a. Définitions :

Définitions :

Un ensemble E est une collection d'objets, appelés éléments.

Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.

Une partie ou sous-ensemble de E est un ensemble F dont tous les éléments appartiennent à E, c'est-à-dire telle que $\forall\, x \in F,\ x \in E$.
On dit que F est inclus dans E et on note $F \subset E$.

Autres notations usuelles :

- Si un élément x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.
- Si F est un ensemble qui n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$.
- Si F désigne une partie de E (éventuellement E), on note parfois $F \subseteq E$ (c'est synonyme de $F \subset E$).
- Si F désigne une partie de E, avec $F \neq E$, on dit que F est strictement incluse dans E et on note $F \subsetneq E$.

b. Ensemble des parties d'un ensemble :

Définition :

Soit E un ensemble. On a appelle $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Propriété :

Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$ alors $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$

c. Produit de deux ensembles :

Définition :

Soient E et F deux ensembles. On a appelle produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples formés par un élément de E et un élément de F : $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$.

2. Opérations sur les parties

a. Intersection et réunion :

Définitions :

Soient E un ensemble et A et B, deux parties de E.

- On a appelle intersection de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B : $A \cap B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ et } y \in B\}$.
- On a appelle réunion ou union de A et B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B : $A \cup B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ ou } y \in B\}$.
- Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjointes (= d'intersection vide). Pour la réunion de deux parties disjointes, on parle d'union disjointe, parfois notée $A \sqcup B$.

- Une famille $(A_1, A_2, ..., A_n)$ de parties deux à deux disjointes de E telle que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$ et une partition de E.

Propriétés :

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- $A \cap A = A \cup A = A$.
- Si $A \subset B$, $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.
- Si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$.
- Si $A \subset B$ et $A \subset C$, alors $A \subset B \cap C$.

Propriétés :

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

i. $\cap$ admet E pour élément neutre ($A \cap E = A$) et $\cup$ admet $\varnothing$ pour élément neutre ($A \cup \varnothing = A$).

Les opérations $\cup$ et $\cap$ sont :

ii. *commutatives* : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.

iii. *associatives* : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

iv. *distributives l'une par rapport à l'autre* :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \text{ et } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

b. Complémentaire :

Définitions :

Soient E un ensemble et A et B, deux parties de E.

- On a appelle complémentaire de A dans E, notée $E \setminus A$ ou $E - A$ ou $\overline{A}$ ou $\complement_E A$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A : $E \setminus A = \{x \in E \setminus x \notin A\}$.
- On a appelle complémentaire de A dans B ou différence, notée $B \setminus A$ ou $B - A$, l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A : $B \setminus A = \{x \in B \setminus x \notin A\}$.

Propriétés :

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

- $B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = B \cap \overline{A}$ et $B \setminus A \subset B$ et $B \setminus A \subset \overline{A}$.
- $\overline{\overline{A}} = A$.
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
- $A = B \Leftrightarrow \overline{B} = \overline{A}$.

Propriété : Lois de Morgan.

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

III – Applications

1. Vocabulaire

Définitions :

Soient E et F deux ensembles.

Une application *f* de E dans F (ou de E vers F) est une relation entre les éléments de E et certains éléments de F. A tout élément *x* de E est associé un unique élément de F, noté *f*(*x*).

E est appelé ensemble de départ de *f* et F ensemble d'arrivée.

$\forall x \in \mathrm{E}$, *f*(*x*) est l'image de *x* par *f*.

Si, pour $y \in \mathrm{F}$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$, *x* est un antécédent de *y* par *f*.

L'ensemble $\mathrm{G} = \{(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F} \setminus y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \setminus x \in \mathrm{E}\}$ est appelé graphe de *f*.

Si A est une partie de E, la fonction indicatrice de A, notée 1_A est la fonction de E dans $\{0,1\}$ qui à tout élément x de E associe 1 si $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ et 0 si $\mathrm{x} \in \mathrm{E} \backslash \mathrm{A}$.

Notations :

- On note : $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}\,;\, x \mapsto f(x)$.
- L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ou F^E.
- On note E^I l'ensemble des familles $(\mathrm{x}_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ d'éléments d'un ensemble E indexées par un ensemble I (si $\mathrm{I} = \mathbb{N}$, on retrouve la notation usuelle des suites).

Définition :

Soient $\mathrm{f} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $\mathrm{g} : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

La composée de f par g, notée $\mathrm{g} \circ \mathrm{f}$ est l'application de E dans G qui à tout x de E associe $\mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))$.

Définition :

Soit E un ensemble. On appelle application identité de E, notée id_E, l'application de E dans E qui à tout x de E associe x.

Propriétés :

Soient $\mathrm{f} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $\mathrm{g} : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ et $\mathrm{h} : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ trois applications. On a :

- $\mathrm{f} \circ \mathrm{id}_\mathrm{E} = \mathrm{id}_\mathrm{F} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f}$.
- $(\mathrm{h} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{f} = \mathrm{h} \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{f})$ (la loi $\circ$ est associative et on peut légitimement écrire $\mathrm{h} \circ \mathrm{g} \circ \mathrm{f}$)).

Définitions :

Soient E et F deux ensembles et $\mathrm{f} : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

- Si $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$, on appelle restriction de f à E' l'application de E' dans F qui à tout x de E' associe f(x). On la note $\mathrm{f}|_{\mathrm{E}'}$.
- Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}'$, on appelle prolongement de f à E' toute application $\tilde{\mathrm{f}}$ de E' dans F' (avec $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}'$) telle que $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{E},\ \tilde{\mathrm{f}}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})$.

Définitions :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

- Si $A \subset E$, on appelle image (directe) de A par f l'ensemble, noté f(A), des images des éléments de A par f, soit : $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F \backslash \exists\, x \in A, y = f(x)\}$.
- Si $f : E \to E$, une partie A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$, c'est-à-dire si $\forall\, x \in A$, $f(x) \in A$.
- Si $B \subset F$, on appelle image réciproque de B, notée $f^{-1}(B)$, l'ensemble des antécédents des éléments de B par f, soit $f^{-1}(B) = \{x \in E \backslash f(x) \in B\}$.

Propriétés :

Soit $f : E \to F$.

- Si $A \subset E$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- Si $B \subset F$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

2. Injections, surjections, bijections

Définitions :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

- On dit que f est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
- On dit que f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f, autrement dit si $\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E \backslash y = f(x)$.
- On dit que f est bijective si elle est injective et surjective, autrement dit si tout élément de F admet exactement un antécédent par f, soit $\forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E \backslash y = f(x)$.
- Si f est bijective, alors l'application de F dans E, qui à y de F associe l'unique x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle bijection réciproque (ou réciproque tout court) de f et se note f^{-1}.

Propriétés :

- Si $f : E \to F$ est bijective, on a $f^{-1} \circ f = id_E$ et $f \circ f^{-1} = id_F$.
- $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ (g est alors égale à f^{-1}).

Propriété :

La composée de deux injections (*resp*. surjections) est une injection (*resp*. surjection).
La composée $g \circ f$ de deux bijections f et g est une bijection de bijection réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

IV – Calculs algébriques

1. Loi de composition interne

Définitions :

Soit E un ensemble. Une loi de composition interne * sur E est une application de $E \times E$ dans E. On note $x * y$ l'image d'un couple (x, y) de $E \times E$.

Définitions :

Soit E un ensemble et * une loi de composition interne sur E.

- * est associative si $\forall (x,y,z)\in E^3$, $(x*y)*z = x*(y*z)$ (on peut alors écrire $x*y*z$).
- * est commutative si $\forall (x,y)\in E^2$, $x*y = y*x$.
- Un élément e de E est un élément neutre si $\forall x\in E$, $x*e = e*x = x$.
- Si * possède un élément neutre e, on dit que $x\in E$ possède un symétrique pour * s'il existe $y\in E$ tel que $x*y = y*x = e$ (le symétrique est alors y). On dit alors que x est inversible.

Définition :

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées + et ×.
La loi × est distributive à gauche (*resp.* à droite) par rapport à + si, $\forall (x,y,z)\in E^3$:

$$x\times(y+z) = x\times y + x\times z \ (\textit{resp.}\ (y+z)\times x = y\times x + z\times x).$$

Si × est distributive à gauche et à droite par rapport à +, on dit que × est distributive par rapport à +.

2. Sommes et produits

Dans cette partie, on se place dans un ensemble A muni de deux lois de composition internes, notées + et ×. On suppose en outre que A muni de + est un groupe commutatif (de neutre 0), que × est associative, possède une neutre noté 1 et est distributive par rapport à +.

a. Notations :

Soient n un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de A. Par convention, on note :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times a_2 \times ... \times a_n .$$

Attention : si × n'est pas commutatif, l'ordre est important dans le produit.

$\forall p\in [\![0,n]\!]$ et $\forall p'\in [\![0,n]\!]$ avec $p\le p'$, on peut aussi écrire :

$$\sum_{k=p}^{p'} a_k = a_p + a_{p+1} + ... + a_{p'} \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{p'} a_k = a_p \times a_{p+1} \times ... \times a_{p'} .$$

Remarque : Si $p\ge 1$, on a alors $\sum_{k=p}^{p'} a_k = \sum_{k=0}^{p'} a_k - \sum_{k=0}^{p-1} a_k$.

Variantes : On peut rencontrer des notations du type :

- $\sum_{b\in B} b$ = la somme de tous les éléments de B, une partie finie (voire infinie…) de A ;
- $\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} a_k = a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_p$ où p est le plus grand entier pair de $[\![0,n]\!]$ ($p = 2E\left[\frac{n}{2}\right]$) ;
- $\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} a_k = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_p$ où p est le plus grand entier impair de $[\![0,n]\!]$ ($p = 2E\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$) ;
- …

Sommes doubles :

- $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_{0,j} + \sum_{j=0}^{m} a_{1,j} + ... + \sum_{j=0}^{m} a_{n,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(a_{i,0} + a_{i,1} + ... + a_{i,m}\right) = ...$

- Autre notation : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} a_{i,j}$.
- ***Attention*** : Il se peut que les bornes de la somme intérieure dépendent de l'indice de la somme extérieure, par exemple : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$. Il faut alors faire très attention !

b. Règles de calcul pour la somme :

- $\forall a\in A$, $\sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$ et $\sum_{k=p}^{p'} a = (p'-p+1)a$ (nombre de termes fois a).
- Linéarité : $\forall (a_0,a_1,a_2,...,a_n,b_0,b_1,b_2,...,b_n,\lambda,\mu)\in A^{2n+4}$, on a $\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)=\lambda\sum_{k=0}^{n} a_k+\mu\sum_{k=0}^{n} b_k$.
  Ceci est dû à l'*associativité*, à la *commutativité* de la somme et à la *distributivité* du produit par rapport à l'addition.
- Télescopage : $\forall (a_0,a_1,a_2,...,a_n)\in A^{n+1}$, $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_0$.
- Changement d'indice :
  Soit φ une bijection strictement monotone de $[\![0,n]\!]$ dans une partie de $\mathbb{N}$. Alors :
  $$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k\in\varphi([\![0,n]\!])} a_{\varphi^{-1}(k)}.$$
- Somme doubles : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$.
  Mais ***attention***, on ne peut pas intervertir si $m=m(i)$ dépend de i, soit : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m(i)} a_{i,j}$.

c. Règles de calcul pour le produit :

Comme on l'a vu, il faut faire très attention à la commutativité ou non du produit.

- Si le produit est commutatif, alors $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k)=\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$.
- Si l'un des a_k est nul, alors $\prod_{k=1}^{n} a_k = 0$.
- Si tous les b_k sont inversibles pour le produit, alors $\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$.
- *Télescopage* : Si $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ sont inversibles pour le produit, $\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_n}{a_0}$.
- Si les a_k sont des réels *strictement positifs*, on peut se ramener à une somme par $\prod_{k=1}^{n} a_k = e^{\sum_{k=1}^{n}\ln a_k}$.

d. Exemples d'utilisation des notations Σ et Π

Propriété : *Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique*

> Si (u_n) est une suite arithmétique, alors $\forall n\in\mathbb{N}$:
> $$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}.$$

Propriété : *Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique*

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $q-1$ est inversible pour ×, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Propriété : *Identités remarquables*

Si a et b commutent, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Si de plus n est impair, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k}.$$

e. Coefficients binomiaux et formule du Binôme de Newton :

Définitions :

Soit un entier naturel n.

La factorielle de n est l'entier $n! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ si n est non nul et 1 si $n=0$ (donc $0!=1$). $n!$ se lit « n factoriel » ou « factoriel n »

Pour tout entier p compris entre 0 et n, on pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Ces nombres s'appellent les coefficients binomiaux.

Propriétés :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, p \in [\![0, n]\!]$:

i. $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ (symétrie) et en particulier, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

ii. Si $1 \le p \le n$, $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ (formule de Pascal).

iii. $\binom{n}{p}$ est un entier naturel non nul.

Propriété : *Formule du binôme de Newton*

Si a et b commutent, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

V - Relation d'équivalence

1. Relation binaire

Définition :

Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une application de $E\times E$ à valeurs booléennes (vrai ou faux). Si x et y sont deux éléments de E, $x \mathscr{R} y$ peut être vrai ou faux.

C'est aussi la donnée d'une partie G de $E\times E$. On a alors $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

Définition :

Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que $\mathscr{R}$ est réflexive si $\forall\, x \in E,\ x \mathscr{R} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est symétrique si $\forall\, (x,y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y \Leftrightarrow y \mathscr{R} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est antisymétrique si $\forall\, (x,y) \in E^2,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x \Rightarrow x = y$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est transitive si $\forall\, (x,y,z) \in E^3,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \Rightarrow x \mathscr{R} z$.

2. Relation d'équivalence

Définition :

Soient E un ensemble. Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition :

Soient E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ et $x \in E$.

On appelle classe de x l'ensemble $\{y \in E \setminus y \mathscr{R} x\}$.

Propriétés et définition :

Soient E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$.

- $\forall\, (x,y) \in E^2,\ C_x \cap C_y = \varnothing$ ou $C_x = C_y$.
- $\forall\, x \in E,\ \forall\, y \in C_x,\ C_x = C_y$. Un élément quelconque d'une classe est appelé représentant de cette classe.
- L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de E, c'est-à-dire que la réunion des classes est E et que deux classes distinctes sont disjointes.