Chapitre 10 : Equations différentielles

I – Introduction

II – Equations linéaires du premier ordre

1. Définition
2. Résolution

III – Equations linéaires du second ordre

1. Définition
2. Résolution

I – Introduction

Une équation différentielle est une équation du type :

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

où l'inconnue est y, fonction de la variable x au moins n fois dérivable sur un intervalle I et où F est une fonction de $n+2$ variables.

L'entier n est l'ordre de l'équation.

Une solution de l'équation est une fonction f, n fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation.

Une solution maximale est un couple (f, I) où f est une solution de l'équation sur un intervalle I, *le plus grand possible* (au sens de l'inclusion).

Un problème de Cauchy est la recherche d'une solution d'une équation différentielle d'ordre n vérifiant n conditions initiales. On verra (surtout l'année prochaine) qu'un problème de Cauchy admet souvent une unique solution maximale.

Une équation différentielle est linéaire si elle est de la forme $a_n(x)y^{(n)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$.

II – Equations linéaires du premier ordre

1. Définition

Définitions :

> On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme $a(t)y' + b(t)y = c(t)$, où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
>
> L'équation homogène (ou sans second membre) (ESSM) associée est $a(t)y' + b(t)y = 0$.

Autres types d'équation d'ordre 1 :

- Equations à variables séparables : on peut écrire l'équation sous forme $y'f(y) = g(t)$.
- Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à deux inconnues.
- Equation pour laquelle un changement de fonction inconnue ramène à une équation linéaire.
- …

2. Résolution

Dans la suite, on appelle (E), l'équation $y' + a(t)y = b(t)$ où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes et (H) : $y' + a(t)y = 0$, l'équation homogène associée à (E).

Propriété :

> Les solutions sur I de (H) sont les fonctions :
>
> $$t \mapsto k \exp\left(-\int^t a(u)du\right)$$
>
> où $t \mapsto \int^t a(u)du$ est une primitive de a sur I et k est une constante réelle ou complexe.

Théorème :

> Les solutions sur I de (E) sont les fonctions de la forme :
>
> $$t \mapsto y_p(t) + k \exp\left(-\int^t a(u)du\right)$$
>
> où k est une constante réelle ou complexe et y_p est une solution particulière de (E).

Détermination d'une solution particulière de (E) *par la* *méthode de variation de la constante* :

Les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto k\,e^{-A(t)}$. La méthode de variation de la constante est de chercher une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto k(t)e^{-A(t)}$ où k est une fonction dérivable sur I.

En réinjectant dans (E), on obtient $k'(t) = b(t)e^{A(t)}$ et on obtient une solution particulière :

$$y_p : t \mapsto e^{-A(t)} \int^t b(u)e^{A(u)}\,du\,.$$

Théorème :

> Le problème de Cauchy formé par (E) et la condition initiale $y(t_o) = y_o$ admet une unique solution.

Propriété :

> *Principe de superposition* : Si $b = b_1 + b_2$ où b_1 et b_2 sont deux fonctions continues sur I, alors une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f = f_1 + f_2$ avec f_1 solution de $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$ et f_2 solution de $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$.

III – Equations linéaires du second ordre

1. Définition

Définitions :

> On appelle équation différentielle linéaire du second ordre une équation de la forme $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t)$, où a, b, c et f sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
>
> L'équation homogène (ou sans second membre) (ESSM) associée est $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$.

2. Résolution

Dans la suite on appelle (E), l'équation $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b et c sont trois nombres réels ou complexes tels que $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes et (H) : $ay'' + by' + cy = 0$, l'équation homogène associée à (E).

Définition :

> On appelle équation caractéristique associée à (E), l'équation $ar^2 + br + c = 0$ (d'inconnue r).

Propriété :

> Si on appelle r_1 et r_2 les racines (éventuellement complexes) de l'équation caractéristique, les solutions de (H) sur I sont les fonctions :
>
> - $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ si $r_1 \neq r_2$;
> - $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$ si $r_1 = r_2$.
>
> où λ et μ sont des constantes réelles ou complexes.

Cas des fonctions à valeurs réelles :

Si a, b et c sont réels, alors trois cas se présentent :

1) L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$) et les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ avec λ et μ réels.

2) L'équation caractéristique admet une racine réelle double r_o ($\Delta = b^2 - 4ac = 0$) et les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_o t}$ avec λ et μ réels.
3) L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$) et les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto (\lambda \cos\beta t + \mu \sin\beta t)e^{\alpha t}$ avec λ et μ réels.

Théorème :

L'équation (E) admet des solutions sur I et si y_p est une solution particulière de (E), alors :

y est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $y = y_p + y_h$ avec y_h solution de l'ESSM (H).

Propriété :

Si $f(t) = K e^{\alpha t}$ avec $(\alpha, K) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, alors (E) admet une solution particulière de la forme $t \mapsto Q(t) e^{\alpha t}$ où Q est une fonction polynôme telle que :

- Q est constante si α n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- Q est affine si α est racine simple de l'équation caractéristique ;
- Q est de degré 2 si α est racine double de l'équation caractéristique.

Théorème :

Le problème de Cauchy formé par (E) et les conditions initiales $y(t_o) = y_o$ et $y'(t_o) = y'_o$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

Principe de superposition : Si $f = f_1 + f_2$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur I, alors une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g = g_1 + g_2$ avec g_1 solution de $(E_1): ay'' + by' + cy = f_1(t)$ et g_2 solution de $(E_2): ay'' + by' + cy = f_2(t)$.

Une application :

Si le second membre de (E) est de la forme $f(t) = K\cos(\omega t)$ ou $f(t) = K\sin(\omega t)$ avec K et ω réels, alors avec les formules d'Euler, on a :

$$ay'' + by' + cy = \frac{K}{2}e^{i\omega t} + \frac{K}{2}e^{-i\omega t} \text{ ou } ay'' + by' + cy = \frac{K}{2i}e^{i\omega t} - \frac{K}{2i}e^{-i\omega t}.$$

On peut alors utiliser le principe de superposition et la propriété vue plus haut (deux fois).

Remarques : Dans le cas où a, b et c sont réels, on peut aller plus vite en remarquant que :

- toute solution réelle de $ay'' + by' + cy = K\cos(\omega t)$ est la partie réelle d'une solution (complexe) de $ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$;
- toute solution réelle de $ay'' + by' + cy = K\sin(\omega t)$ est la partie imaginaire d'une solution (complexe) de $ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$.

Dans les deux cas, si $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors une solution particulière de $ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$ est de la forme $t \mapsto \lambda e^{i\omega t}$ avec λ complexe dont les parties réelles est imaginaires seront des combinaisons linéaires de $t \mapsto \cos(\omega t)$ et $t \mapsto \sin(\omega t)$.