Chapitre 11 : Suites numériques

I – Suites de nombres réels

1. Généralités

a. Définition :

Définitions :

Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le réel u_n est appelé terme général de la suite et n est le rang du terme u_n.

Une suite est constante si $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = a$ avec a réel fixé.

La suite nulle, notée $0_{\mathbb{N}}$ (ou 0 si ce n'est pas ambigu) est la suite telle que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = 0$.

Une suite est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang (apcr).

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique s'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$. Dans ce cas, p est une période de u et on dit que u est p-périodique.

Pratiquement, il y a plusieurs façons de définir une suite dont les principales sont :

- Suite définie de façon explicite, par une formule directe : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = f(n)$ ou un énoncé s'y ramenant ;
- Suite définie par récurrence ou un énoncé s'y ramenant :
  - récurrence simple : u_0 et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$;
  - récurrence double : u_0, u_1 et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$;
  - récurrence triple, quadruple, … multiple ;
- Suites implicites ou un énoncé s'y ramenant.

b. Opérations :

On définit les opérations suivantes sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- *Combinaison linéaire* : $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda u + \mu v$ est la suite de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$.
- *Produit* : $u\times v$ (ou uv) est la suite de terme général $u_n v_n$.
- *Quotient* : si $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n \neq 0$, $\dfrac{u}{v}$ est la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ (éventuellement apcr).
- On définit aussi sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la relation d'ordre suivante : $\forall\,(u,v)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u\le v$ si $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\le v_n$.

c. Suites majorées, minorées, bornées :

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que u est majorée (*resp.* minorée) s'il existe un réel μ tel que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\le\mu$ (*resp.* $u_n\ge\mu$).

On dit que μ est un majorant (*resp.* minorant) de u.

On dit que u est bornée si elle est majorée et minorée.

d. <u>Monotonie</u> :

<u>Définition</u> :

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
>
> On dit que u est <u>croissante</u> (*resp.* <u>strictement croissante</u>) si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \le u_{n+1}$ (*resp.* $u_n < u_{n+1}$).
>
> On dit que u est <u>décroissante</u> (*resp.* <u>strictement décroissante</u>) si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \le u_n$ (*resp.* $u_{n+1} < u_n$).
>
> On dit que u est <u>croissante</u> (*resp.* <u>strictement croissante</u>, *resp.* <u>décroissante</u>, *resp.* <u>strictement décroissante</u>) <u>à partir du rang n_o</u> si $\forall\, n \ge n_o$, $u_n \le u_{n+1}$ (*resp.* $u_{n+1} < u_n$, *resp.* $u_{n+1} \le u_n$, *resp.* $u_{n+1} < u_n$).
>
> On dit que u est <u>monotone</u> (*resp.* <u>strictement monotone</u>) (à partir du rang n_o) si u est croissante ou décroissante (à partir du rang n_o).

2. <u>Limite d'une suite</u>

a. <u>Suites convergentes, suites divergentes</u> :

<u>Définitions</u> :

> Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et un réel ℓ. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>admet ℓ pour limite</u> si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\forall\, n \ge N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
> Lorsqu'un tel nombre ℓ existe, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>convergente</u> (vers ℓ) ou qu'elle <u>converge</u> (vers ℓ) ou qu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>divergente</u>.
> On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$)</u> si pour tout réel $A > 0$, il existe un entier N tel que $\forall\, n \ge N$, $u_n > A$ (*resp.* $u_n < -A$).

<u>Propriété</u> :

> Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique.

<u>Propriété</u> :

> Si $u_n = f(n)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ avec ℓ fini ou infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

<u>Propriété</u> :

> Toute suite convergente est bornée.

<u>Propriété</u> :

> Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif ou divergeant vers $+\infty$ est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

b. <u>Opérations sur les suites convergentes</u> :

Remarquons que en conséquence immédiate de la définition de la convergence d'une suite, on a :

- $u_n \to 0 \iff |u_n| \to 0$.
- $u_n \to \ell$ (avec ℓ fini) $\iff u_n - \ell \to 0$.

<u>Propriété</u> :

> L'ensemble des suites de limite nulle est stable par combinaisons linéaires.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Propriété :

Soient u et v deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ avec ℓ et ℓ' finies.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.
- $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\ell + \mu\ell'$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \ell\ell'$.
- Si $\ell' \neq 0$ alors $v_n \neq 0$ apcr et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ (en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell'}$).

c. Opérations sur les suites quelconques :

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- Si u converge et v diverge alors $u + v$ diverge.
- Si u est bornée et v diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) alors $u + v$ diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$).
- Si u et v divergent vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) alors $u + v$ diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$).

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- Si $v_n \geq m > 0$ (*resp.* $v_n \leq m < 0$) apcr et u diverge vers $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) alors uv diverge vers $+\infty$.
- Si $v_n \geq m > 0$ (*resp.* $v_n \leq m < 0$) apcr et u diverge vers $-\infty$ (*resp.* $+\infty$) alors uv diverge vers $-\infty$.
- Si u et v divergent vers $\pm\infty$ alors uv diverge vers $\pm\infty$, le signe étant donné par la règle des signes.

Propriétés :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- Si $u_n > 0$ (*resp.* $u_n < 0$) apcr et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$ (*resp.* $-\infty$).
- Si u diverge vers l'infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite a (finie ou infinie) et f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

d. Convergence et ordre :

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- Si u et v convergent et $u_n \le v_n$ apcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- Si u converge et $u_n \le M$ (*resp.* $u_n \ge m$) apcr alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le M$ (*resp.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \ge m$).

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que v est positive, de limite nulle et $|u_n| \le v_n$ apcr alors la suite u converge vers 0.

3. Théorèmes d'existence de limites

a. Cas des suites monotones :

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.
Si u est majorée, elle converge vers $\ell = \sup\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$, sinon elle diverge vers $+\infty$.

Corollaire :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.
Si u est minorée, elle converge vers $\ell = \inf\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$, sinon elle diverge vers $-\infty$.

b. Théorème des gendarmes :

Théorème :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites.

Si $v_n \le u_n \le w_n$ apcr et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
Si $u_n \ge v_n$ (*resp.* $u_n \le v_n$) apcr et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (*resp.* $-\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (*resp.* $-\infty$).

c. Suites adjacentes :

Définition :

Deux suites u et v sont adjacentes si elles sont monotones de sens contraires et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Lemme :

Soient u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante. On a alors $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ u_n \le v_p$.

Théorème :

Si u et v sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

4. Suites extraites

Lemme :

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(n) = +\infty$ et $\tilde{\varphi} : \mathbb{N} \to \varphi(\mathbb{N})\,;\, n \mapsto \varphi(n)$ est une bijection.

Définition :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite extraite de u.

Propriété :

Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.

Propriété : *Théorème de Bolzano-Weierstrass* (hors programme)

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

II – Suites récurrentes d'ordre 1

1. Généralités

Définition :

Une suite récurrente d'ordre 1 est une suite définie par $u_0 \in A$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, où f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $f(A) \subset A$.

$\forall\, u_0 \in A$, la suite récurrente vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

Propriété :

Si f est bornée, u l'est aussi.

2. Sens de variation

Propriété :

Si f est croissante sur I, alors u est monotone. Plus précisément, si $u_0 \leq u_1$, u est croissante et si $u_0 \geq u_1$, u est décroissante.

Si f est décroissante sur I, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Plus précisément :

- si $u_0 \leq u_2$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- si $u_0 \geq u_2$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Limite

Propriété :

Si u converge vers $\ell \in I$ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f, soit $f(\ell)=\ell$.

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$ et $|f'| \leq k < 1$, et la suite u définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

- f admet un unique point fixe $\ell \in [a,b]$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$ et la suite u converge vers ℓ.

III – Extension aux suites complexes

1. Généralités

Définition :

Une suite complexe est une application de $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Définitions :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On a appelle partie réelle de u, notée $\mathrm{Re}(u)$, la suite $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, partie imaginaire de u, notée $\mathrm{Im}(u)$, la suite $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, suite conjuguée de u, notée $\overline{u}$, la suite $(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et module de u, notée $|u|$, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
On dit que u est bornée s'il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

2. Limites

Définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et un complexe ℓ. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite ou converge vers ℓ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \setminus \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.
Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Propriété :

Si une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est unique et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée.

Propriété :

Soit une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ ssi $\mathrm{Re}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.
- u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\overline{u}$ converge vers $\overline{\ell}$.

Propriété :

Soit u une suite convergeant vers ℓ. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$

Propriétés :

Soient u et v deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ avec ℓ et ℓ' finies.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell\ell'$.
- Si $\ell' \neq 0$ alors $v_n \neq 0$ apcr et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ (en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\ell'}$).

IV – Suites usuelles

1. Suites arithmétiques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $R \in \mathbb{C}$ si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + R$. Alors :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nR$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + (n-p)R$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

- $\forall\, (p,n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=p}^{n+p} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n+p} = (n+1)\frac{u_p + u_{n+p}}{2} = (\text{nb de termes}) \times (\text{moyenne du } 1^{\text{er}} \text{ et du dernier terme}).$$

- Si la suite est *réelle*, (c'est-à-dire $R \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$) alors :
  - si $R > 0$, u est croissante et diverge vers $+\infty$
  - si $R < 0$, u est décroissante et diverge vers $-\infty$.

2. Suites géométriques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q u_n$. Alors :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$.
- si $q \neq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- si $q \neq 1$, $\forall\, (p,n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=p}^{n+p} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n+p} = u_p \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{nb de termes})}}{1 - q}.$$

- Si la suite est *réelle*, (c'est-à-dire $q \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$) alors :
  - si q < 0, u n'est pas monotone ;
  - si q > 0, u est monotone et son sens de variation dépend de la position de q par rapport à 1 et du signe de son premier terme.
- Si $|q| < 1$, u converge vers 0, si $|q| > 1$, u diverge, si $q = 1$, u est constante.
- Si la suite est *réelle* et $q > 1$, u diverge vers + ∞ ou – ∞ suivant le signe de son premier terme.

3. Suites arithmético-géométriques

Définition :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b (réels ou complexes) non nuls tels que $a \neq 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.
On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right)a^n - \frac{b}{a-1}.$$

4. Suites récurrentes linéaires doubles

Définitions :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire double s'il existe deux nombres a et b (réels ou complexes) tels que $b \neq 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

On a appelle polynôme caractéristique associé à u le trinôme $r^2 - ar - b$.

Théorème :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire double telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Si r_1 et r_2 sont les racines (complexes) de $r^2 - ar - b$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \begin{cases} \lambda r_1^{\ n} + \mu r_2^{\ n} & \text{si } r_1 \neq r_2 \\ (\lambda n + \mu) r_1^{\ n} & \text{si } r_1 = r_2 \end{cases}$$

avec λ et μ deux nombres fixés.

De plus, la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit la suite de manière unique.

Enfin, si u_0, u_1, a et b sont réels, la suite est réelle, et si $r^2 - ar - b$ admet deux racines complexes distinctes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)$ avec λ et μ réels.