Chapitre 12 : Analyse asymptotique

I – Comparaison de suites de nombres réels

1. Domination, négligeabilité

Définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ apcr. On note $u_n = O(v_n)$ ou $u = O(v)$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite de limite nulle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ apcr. On note $u_n = o(v_n)$ ou $u = o(v)$.

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_n \neq 0$.

- $u = O(v) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- $u = o(v) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si $u = o(v)$ alors $u = O(v)$. La réciproque est fausse.

Propriétés :

- Les relations O et o sont transitives.
- Si $u = O(v)$ (*resp.* $u = o(v)$) alors $\forall\, \lambda\in\mathbb{R}^*$, $u = O(\lambda v)$ (*resp.* $u = o(\lambda v)$).
- Si $u = O(w)$ et $v = O(w)$ (*resp.* $u = o(w)$ et $v = o(w)$) alors $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda u + \mu v = O(w)$ (*resp.* $\lambda u + \mu v = o(w)$).
- $u = O(v)$ alors pour toute suite w, $uw = O(vw)$. De même avec o.
- $u = O(v)$ et $u' = O(v')$ alors $uu' = O(vv')$. De même avec o.
- Si $u = O(v)$ (*resp.* $u = o(v)$) et u et v ne s'annule pas apcr, $\dfrac{1}{v} = O\left(\dfrac{1}{u}\right)$ (*resp.* $\dfrac{1}{v} = o\left(\dfrac{1}{u}\right)$).

2. Equivalences

Définitions :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 telle que apcr, $u_n = \varepsilon_n v_n$. On note $u_n \sim v_n$ ou $u \sim v$.

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Alors :

- $u \sim v \iff u = v + o(v)$.
- Si $v_n \neq 0$ apcr, $u \sim v \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Propriétés :

La relation ~ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Propriété :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites équivalentes, alors si $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

Propriétés :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites équivalentes. Alors :

- u_n et v_n sont de même signe apcr (et en particulier, u et v s'annulent en même temps apcr).
- Si v admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, u aussi.
- Si v diverge, u aussi.
- Si $v = O(w)$ (*resp.* $v = o(w)$), alors $u = O(w)$ (*resp.* $u = o(w)$).
- Si $w = O(u)$ (*resp.* $w = o(u)$), alors $w = O(v)$ (*resp.* $w = o(v)$).

Propriétés :

- Si $u \sim v$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \sim \lambda v$.
- Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$ alors $uu' \sim vv'$.
- Si $u \sim v$ et $u' \sim v'$ avec $u_n \neq 0$ apcr alors $u_n \neq 0$ apcr et $\dfrac{u'}{u} \sim \dfrac{v'}{v}$.

3. Comparaison des suites de référence

Propriétés :

Soient trois réels non nuls α, β et $a > 0$.

- Si $0 < a < 1$, alors $a^n = o(n^\alpha)$ et si $a > 1$, alors $n^\alpha = o(a^n)$.
- Si $\alpha < 0$, alors $n^\alpha = o\left((\ln n)^\beta\right)$ et si $\alpha > 0$, alors $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.
- $a^n = o(n!)$.

Corollaires :

Soient trois réels non nuls α, β et $a > 0$.

- Si $0 < a < 1$, alors $a^n = o\left((\ln n)^\beta\right)$ et si $a > 1$, alors $(\ln n)^\beta = o(a^n)$.
- $n^\alpha = o(n!)$ et $(\ln n)^\beta = o(n!)$.

II – Comparaison de fonctions numériques

Dans tout ce qui suit, on considère un intervalle I, $a \in \overline{I}$ (a appartient à I ou est une extrémité éventuellement infinie de I) et f et g deux fonctions définies sur I telles que g ne s'annule pas sur I privé de a (le cas échéant).

1. Domination, négligeabilité

Définitions :

- On dit que f est <u>dominée</u> par g au voisinage de a s'il existe une fonction u définie sur I et bornée au voisinage de a telle que $f = ug$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} O\big(g(x)\big)$.
- On dit que f est <u>négligeable</u> devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur I et de limite nulle en a telle que $f = \varepsilon g$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{a}{=} o\big(g(x)\big)$.

Propriétés :

- $f \underset{a}{=} O(g) \iff \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
- $f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$

Propriété :

$f \underset{a}{=} o(g) \Rightarrow f \underset{a}{=} O(g)$. La réciproque est fausse.

Propriétés :

- Les relations $\underset{a}{O}$ et $\underset{a}{o}$ sont transitives.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$) alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{=} O(\lambda g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$).
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$) alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $\lambda f + \mu h \underset{a}{=} o(g)$).
- $f \underset{a}{=} O(g)$ alors pour toute fonction h ne s'annulant pas au voisinage de a, $fh \underset{a}{=} O(gh)$. Idem avec o.
- $f_1 \underset{a}{=} O(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} O(g_2)$ où g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a $f_1 f_2 \underset{a}{=} O(g_1 g_2)$. Idem avec o.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(g)$) et f ne s'annule pas au voisinage de a, $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} O\left(\dfrac{1}{f}\right)$ (*resp.* $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} o\left(\dfrac{1}{f}\right)$).

2. Equivalence

Définition :

On dit que f est <u>équivalente</u> à g au voisinage de a s'il existe une fonction ε de limite 1 en a telle que, $f = \varepsilon g$ au voisinage de a. On note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Propriété :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g) \iff \lim_{a} \frac{f}{g} = 1.$$

Propriétés :

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

Propriétés :

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et h est une fonction ne s'annulant pas au voisinage de a alors :

- f et g sont de même signe au voisinage de a.
- Si g admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, f aussi.
- $g \underset{a}{=} O(h)$ (*resp.* $g \underset{a}{=} o(h)$), alors $f \underset{a}{=} O(h)$ (*resp.* $f \underset{a}{=} o(h)$).
- Si $h \underset{a}{=} O(g)$ (*resp.* $h \underset{a}{=} o(g)$), alors $h \underset{a}{=} O(f)$ (*resp.* $h \underset{a}{=} o(f)$).

Propriétés :

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$.
- Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, les fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_2}{f_1} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_2}{g_1}$.

3. Comparaison des fonctions usuelles

Propriétés :

Soient trois réels non nuls α, β et $a > 0$.

- Si $0 < a < 1$, alors $a^x = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$ et si $a > 1$, alors $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(a^x)$.
- Si $\alpha < 0$, alors $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}\left((\ln x)^\beta\right)$ et si $\alpha > 0$, alors $(\ln x)^\beta = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$.
- Si $0 < a < 1$, alors $a^x = \underset{+\infty}{o}\left((\ln x)^\beta\right)$ et si $a > 1$, alors $(\ln x)^\beta = \underset{+\infty}{o}(a^x)$.
- Si $\alpha < \beta$, $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(x^\beta)$.

Propriétés :

Soient deux réels non nuls α et β.

- Si $\alpha < \beta$, $|x|^\beta = \underset{0}{o}(|x|^\alpha)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $x^\alpha = \underset{0^+}{o}\left(|\ln x|^\beta\right)$ et si $\alpha < 0$, alors $|\ln x|^\beta = \underset{0^+}{o}(x^\alpha)$.

III – Formules de Taylor

Dans tout le reste du chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème : *Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.*

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. On a $\forall x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Si dans la formule précédente, on pose $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ et $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$, on a :

Théorème : *Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.*

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$. S'il existe $M \geq 0$ tel que $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I, alors $\forall x \in I$:

$$\left|f(x) - T_n(x)\right| = \left|R_n(x)\right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

IV – Développements limités

1. Définition

Définitions :

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n au voisinage de a (en a), s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Si $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ et $a_p \neq 0$, on a $f(a+h) = h^p(a_p + \dots + a_n h^{n-p} + \underset{0}{o}(h^{n-p}))$. Cette écriture s'appelle la forme normalisée du développement limité.

Propriété :

Si une fonction admet un DL d'ordre n au voisinage de a, alors ce DL est unique.

2. Intégration terme à terme d'un développement limité

Propriété :

Soient f une fonction dérivable sur I et $a \in I$. Si f' admet un DL d'ordre n au voisinage de a, alors f admet un DL d'ordre $n+1$ au voisinage de a, obtenu en intégrant terme à terme le DL de f'.

3. Formule de Taylor-Young et dérivation terme à terme d'un développement limité

Théorème : *Formule de Taylor-Young à l'ordre n.*

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$. On a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{0}{o}(h^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underset{0}{o}(h^n).$$

Corollaires :

- Toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I admet un DL d'ordre n au voisinage de tout $a \in I$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I et admet un DL d'ordre $n-1$ au voisinage de tout $a \in I$, obtenu en dérivant terme à terme le DL d'ordre n de f en a.

4. Opérations algébriques sur les développements limités

a. Combinaison linéaire :

Propriété :

Si f et g sont deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a \in I$, alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL d'ordre n en a qui est la combinaison linéaire de ceux de f et g.

b. Produit :

Propriété :

Si f et g sont deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a, alors $f \times g$ admet un DL d'ordre n en a obtenu en multipliant les DL de f et g et en ne gardant que les termes de degré inférieur où égal à n.

c. Quotient :

On a vu qu'en 0, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Soit une fonction g admettant un DL d'ordre n en a : $g(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$ avec $a_0 \neq 0$.

On a alors :

$$\frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n)} = \frac{1}{a_0}\,\frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} h + \frac{a_2}{a_0} h^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n + o(h^n)}.$$

Or, si on pose $x = \dfrac{a_1}{a_0} h + \dfrac{a_2}{a_0} h^2 + \cdots + \dfrac{a_n}{a_0} h^n + o(h^n)$ dans le DL de $\dfrac{1}{1+x}$ en 0, on a :

$$\frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{a_0}\left[1 - \left(\frac{a_1}{a_0} h + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n\right) + \left(\frac{a_1}{a_0} h + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n\right)^2 - \ldots + (-1)^n \left(\frac{a_1}{a_0} h + \cdots + \frac{a_n}{a_0} h^n\right)^n\right] + o(h^n)$$

car, quels que soient p et q non nul, on a $h^p \left(o(h^n)\right)^q = h^{p+nq} \left(\varepsilon(h)\right)^q = o(h^n)$.

Alors, si en développant chaque puissance, on ne garde que les puissances de h inférieures ou égales à n, on obtient un DL d'ordre n de $\dfrac{1}{g}$ en 0.

Propriété :

> Si f et g sont deux fonctions admettant un DL d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en a tel que le terme constant du DL de g ne soit pas nul, alors $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ admet un DL d'ordre n en a.

d. Composée :

Dans le même ordre d'idée que dans la partie précédente, si f et g sont deux fonctions admettent un DL d'ordre n au voisinage de a et f(a) respectivement, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n au voisinage de a.

Plus précisément, si $f(a+h) = f(a) + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$ et $g(f(a)+u) = b_0 + b_1 u + \cdots + b_n u^n + o(u^n)$, on a, en posant $u = a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$:

$$g \circ f(a+h) = b_0 + b_1 \left(a_1 h + \cdots + a_n h^n\right) + \cdots + b_n \left(a_1 h + \cdots + a_n h^n\right)^n + o(h^n).$$

Là encore, en ne gardant que les puissances de h inférieures ou égales à n, dans les développements, on obtient un DL d'ordre n (voire plus dans certains cas) de $g \circ f$ en a.

5. Développement limité des fonctions usuelles

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0.

Développements de base (obtenus par la formule de Taylor-Young) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \textbf{(1)}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \qquad \textbf{(2)}$$

Développements obtenus à partir de **(1)** :

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \frac{\lambda^3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n x^n}{n!} + o(x^n) \qquad (x \leftrightarrow \lambda x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{(formule de ch)}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{(formule de sh)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \qquad \text{(quotient)}$$

<u>Développements obtenus à partir de **(2)**</u> :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -1 \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1\times3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times4\times\ldots\times(2n)} x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = ½)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots - \frac{1\times3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times4\times\ldots\times(2n)} x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = ½ \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{16} x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)} x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -½)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)} x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -½ \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)} \frac{x^{2n}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{40} x^5 - \cdots - \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)} \frac{x^{2n}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \left(\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$$

V – Applications

1. Calculs de limites et équivalents

Quand on a le DL d'une fonction au voisinage de a, le premier terme non nul permet d'obtenir $\lim\limits_{a} f$ (qui est nulle si la puissance de ce terme est non nulle) et est aussi un équivalent simple de f(x) en a.

En effet, si $f(a+h) = a_p h^p + ... + a_n h^n + o(h^n)$ (avec $a_p \neq 0$), on a vu que $f(a+h) = a_p h^p + o(h^p)$ donc :

$$f(a+h) \underset{0}{\sim} a_p h^p \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} a_p h^p .$$

Remarquons que l'on a aussi $f(a+h) \underset{0}{\sim} a_p h^p + ... + a_n h^n$ car $a_p h^p + ... + a_n h^n \underset{0}{\sim} a_p h^p$.

2. Développements asymptotiques

a. Cas des fonctions :

Si la limite de f en a (éventuellement infini) est infinie, on ne peut pas faire de développement limité, mais éventuellement quelque chose de similaire que l'on appelle développement asymptotique dont tous les termes sont simples mais pas forcément polynomiaux en la variable.

b. Cas des suites :

Propriété :

Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n en a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + \underset{a}{o}\left((x-a)^n\right)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers a, alors :

$$f(u_n) = a_0 + a_1(u_n - a) + ... + a_n(u_n - a)^n + o((u_n - a)^n) .$$

Applications : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, alors :

- avec $f(x) = \ln(1+x)$, on obtient $\ln(1+u_n) = u_n + o(u_n)$ (et $\ln(1+u_n) \sim u_n$) ;
- avec $f(x) = e^x$, on obtient $e^{u_n} = 1 + u_n + o(u_n)$ (et $e^{u_n} \sim 1 + u_n$) ;
- avec $f(x) = (1+x)^\alpha$, on obtient $(1+u_n)^\alpha = 1 + \alpha u_n + o(u_n)$ (et $(1+u_n)^\alpha \sim 1 + \alpha u_n$) ;
- avec $f(x) = \sin x$, on obtient $\sin u_n = u_n + o(u_n)$ (et $\sin u_n \sim u_n$) ;
- …