Chapitre 13 : Algèbre Linéaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Espaces vectoriels

1. Généralités

a. Définition :

Définition :

Soit E un ensemble muni d'une loi interne + et d'une loi externe sur $\mathbb{K}$, $\times$.

On dit que $(E,+,\times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

- $(E,+)$ est un groupe commutatif (+ est interne, associative, commutative, possède un neutre noté 0_E (ou 0 quand ce n'est pas ambigu) et chaque élément x de E admet un symétrique pour + noté $-x$).
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \times x \in E$.
- $\forall x \in E,\ 1 \times x = x$.
- $\forall x \in E$ et $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \times (\mu \times x) = (\lambda\mu) \times x$ et $(\lambda+\mu)\times x = \lambda \times x + \mu \times x$
- $\forall (x,x') \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \times (x+x') = \lambda \times x + \lambda \times x'$.

Un élément d'un espace vectoriel est appelé vecteur et un élément de $\mathbb{K}$ est appelé scalaire.

Si $(x_1,x_2,\dots,x_p) \in E^p$, une combinaison linéaire des x_i est une expression de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$ avec $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

Dans toute la suite, sauf cas contraire, on se place dans E*, un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Propriétés :

- $\forall x \in E,\ 0x = 0_E$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda 0_E = 0_E$.
- $\lambda x = 0_E \Leftrightarrow x = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
- $\forall x \in E,\ (-1)x = -x$ (le symétrique de x pour +).

b. Espaces produit, espaces d'applications :

Propriétés et définition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- $E \times F$, muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé espace produit.
- Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathcal{F}(X,E)$ des applications de X dans E, muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Sous-espaces vectoriels

a. Définition et caractérisation :

Définition :

Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide de E qui, muni des restrictions des lois de E, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété :

Soit F une partie non vide de E.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $\forall (x, x') \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x + \mu x' \in F$.

b. Intersection de sous-espaces vectoriels :

Propriété :

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

c. Sous-espace vectoriel engendré par une partie :

Définition :

Soit A une partie de E. On appelle sous-espace engendré par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

Propriété :

Si A est une partie finie de E, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A.

Propriété :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_p x_p)$.
- $\forall (\lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{Vect}(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, ..., x_p + \lambda_p x_1)$.
- $\forall (\alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{Vect}(x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x_2, ..., x_p)$.

d. Somme de sous-espaces vectoriels :

Propriété et définition :

Soient F et G deux s.e.v. de E, l'ensemble $\{x \in E \setminus x = x_F + x_G, (x_F, x_G) \in F \times G\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et G, noté $F + G$.

De plus, si $F \cap G = \{0\}$, on dit que la somme est directe et on note $F \oplus G$.

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces de E. On a $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces de E.

$F \cap G = \{0\}$ si et seulement si $\forall x \in F + G$, $\exists! (x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

e. Sous-espaces supplémentaires :

Définition :

Soient F et G deux s.e.v. de E. On dit que F et G sont supplémentaires si $F \oplus G = E$.

Définition :

Soit F un s.e.v. de E. On dit que F est un hyperplan s'il admet une droite vectorielle pour supplémentaire.

3. Famille libre, famille liée

Définition :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille finie de vecteurs de E.

On dit que la famille est libre si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On dit que la famille est libre si toute sous-famille finie de $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Dans le cas contraire, on dit que la famille (finie ou non) est liée.

Si deux vecteurs forment une famille liée, on dit qu'ils sont colinéaires.

Si trois vecteurs forment une famille liée, on dit qu'ils sont coplanaires.

Propriétés :

- Toute famille extraite d'une famille libre est libre.
- Si *F* est une famille liée, alors toute famille contenant *F* est liée.

Propriété :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre de n vecteurs de E, avec $n \geq 2$. Pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k)$ et $\mathrm{Vect}(x_{k+1}, ..., x_n)$ sont en somme directe.

4. Famille génératrice

Définition :

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que cette famille est génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}\left(\{x_i, i \in I\}\right)$.

Propriété :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille génératrice de E alors :

- $\forall\, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_p x_p)$ est génératrice.
- $\forall\, (\lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, ..., x_p + \lambda_p x_1)$ est génératrice.
- $\forall\, (\alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $(x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x, ..., x_p)$ est génératrice.

Propriété :

Si *F* est une famille génératrice de E, alors toute famille contenant *F* est génératrice.

II – Applications linéaires

1. Définitions

Dans ce qui suit, on considère E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définitions :

Une application $f : E \to F$ est une application linéaire, si $\forall\,(x, x') \in E^2$ et $\forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$f(\lambda x + \mu x') = \lambda f(x) + \mu f(x').$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Si, de plus, f est bijective, f est un isomorphisme.

Si $E = F$, f est un endomorphisme. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Si $E = F$ et f est bijective, f est un automorphisme. L'ensemble des automorphismes de E est noté GL(E).

Si $F = \mathbb{K}$, f est une forme linéaire.

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $f(0_E) = 0_F$.
- L'image d'une combinaison linéaire par une application linéaire est la même combinaison linéaire des images, soit $\forall\,(x_1, x_2, ..., x_p) \in E^p$ et $\forall\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p) = \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_p f(x_p).$$

2. Applications linéaires et opérations

Propriété :

$\mathcal{L}(E, F)$ muni de l'addition et de la multiplication externe naturelles, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriétés :

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.
- La loi $\circ$ est distributive à droite et à gauche par rapport à +.

Propriété et définition :

GL(E) muni de la loi $\circ$ est un groupe, appelé groupe linéaire de E.

3. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si G est un sous-espace de E, alors $f(G)$ est un sous-espace de F.
- Si H est un sous-espace de F, alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace de E.

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace F de E est stable par f si $f(F) \subset F$.

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si E_1 et E_2 sont deux sev de E, alors $f(E_1 + E_2) = f(E_1) + f(E_2)$.
- Si $E = E_1 \oplus E_2$, f est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.

4. Image et noyau

a. Définition :

Définitions :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Le noyau de f, noté $\ker f$, est l'ensemble des antécédents de 0_F par f, soit :
$$\ker f = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \left\{x \in E \setminus f(x) = 0_F\right\}.$$
- L'image de f, notée $\operatorname{Im} f$, est $f(E)$, soit :
$$\operatorname{Im} f = f(E) = \left\{y \in F \setminus \exists\, x \in E \text{ tel que } y = f(x)\right\}.$$

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- $\ker f = f^{-1}\left(\{0_F\}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\operatorname{Im} f = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

b. Propriétés :

Propriété :

$\forall\, f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}^*$, $\ker \lambda f = \ker f$ et $\operatorname{Im} \lambda f = \operatorname{Im} f$.

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- f est injective $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0_E\}$.
- f est surjective $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} f = F$.

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- u est injective $\Leftrightarrow$ l'image d'une famille libre de E est une famille libre de F.
- u est surjective $\Leftrightarrow$ l'image d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

c. Equations linéaires :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Une équation linéaire est une équation de la forme $u(x) = 0$ d'inconnue x (vecteur). L'ensemble des solutions est bien entendu $\ker u$.

Si maintenant b est un vecteur fixé de F, l'équation $u(x) = b$ admet des solutions si et seulement si $b \in \operatorname{Im} u$ et dans ce cas, l'ensemble des solutions est de la forme $a + \ker u = \left\{a + x \setminus x \in \ker u\right\}$ (*attention* : ce n'est pas un sev de E).

5. Applications linéaires particulières

a. Homothéties :

Définition :

Une homothétie de rapport λ est un endomorphisme de E de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

b. Projecteurs :

Propriété et définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.
Tout élément de x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.
L'application $p : E \to E \,;\, x \mapsto x_F$ est linéaire et s'appelle projecteur ou projection sur F parallèlement à G.

Propriété :

Soit p une projection sur F parallèlement à G. Alors :
- $\ker p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.
- $x \in \operatorname{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x$.

Propriété :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

Propriété et définition :

Si p est une projection de E, alors $\mathrm{Id} - p$ est la projection sur $\ker p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$. On dit que p et $\mathrm{Id} - p$ sont des projecteurs associés.

c. Symétries :

Propriété et définition :

Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.
Tout élément de x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$.
L'application $s : E \to E \,;\, x \mapsto x_F - x_G$ est linéaire et s'appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Propriété :

Soit s une symétrie par rapport F parallèlement à G. Alors :
- $x \in F \Leftrightarrow s(x) = x$ et $F = \ker(s - \mathrm{Id})$.
- $x \in G \Leftrightarrow s(x) = -x$ et $G = \ker(s + \mathrm{Id})$.

Propriété :

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}$.

III – Dimension des espaces vectoriels

1. Bases

Définition :

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est base de E si elle est libre et génératrice.

Propriété et définition :

Soit E une espace vectoriel possédant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.
Tout vecteur x de E s'écrit alors de manière unique $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$ avec $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.
Les x_i sont appelés coordonnées ou composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

2. Dimension d'un espace vectoriel

Définition :

Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème : *de l'échange*

Soient $\mathcal{F} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille libre et $\mathcal{G} = (y_1, y_2, ..., y_p)$ une famille génératrice de E.
On a $n \leq p$ et il existe n vecteur de $\mathcal{G}$, qui échangés par ceux de $\mathcal{F}$ forment une nouvelle famille génératrice.

Théorème : *de la base extraite*

De toute famille finie génératrice d'un espace E de dimension finie et différent de $\{0\}$, on peut extraire une base.

Théorème et définition :

Tout espace vectoriel E de dimension finie et différent de $\{0\}$ possède des bases et toutes les bases ont le même cardinal. Ce cardinal s'appelle la dimension de E, noté $\dim E$.

Propriété :

Etant donnée une famille *F* de p vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
- Si *F* est libre, alors $p \leq n$, avec égalité si et seulement si *F* est une base.
- Si *F* est génératrice, alors $p \geq n$, avec égalité si et seulement si *F* est une base.

Corollaire :

Etant donnée une famille *F* de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :

$$F \text{ est une base} \Leftrightarrow F \text{ est libre} \Leftrightarrow F \text{ est génératrice.}$$

3. Applications linéaires et dimensions finies

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n.$$

Alors, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où F est un espace vectoriel, on a :

$$u(x) = x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + ... + x_n u(e_n).$$

Ceci prouve que la donnée des $u(e_i)$ pour i entre 1 et n définit parfaitement u.

Réciproquement, si $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une famille de n vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Dans le même ordre d'idée, la donnée d'une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de n vecteurs de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque détermine une unique application linéaire u de $\mathbb{K}^n$ dans E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = x_i$ où $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

4. Dimension finie et isomorphismes

Propriété :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Corollaires :

- Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

5. Espace produit

Propriété :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

$E\times F$ est de dimension finie et $\dim(E\times F) = \dim E + \dim F$. De plus, si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ et $(f_1, f_2, ..., f_p)$ sont des bases de E et F alors $\big((e_1, 0_F), (e_2, 0_F), ..., (e_n, 0_F), (0_E, f_1), (0_E, f_2), ..., (0_E, f_p)\big)$ est une base de $E\times F$.

6. Espace $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

$\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

7. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

a. Dimension d'un sous-espace vectoriel :

Théorème :

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \le \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

b. Rang d'une famille de vecteurs :

Définition :

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Le rang de $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$, est la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Propriété :

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

Propriété :

Soit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ une famille de E alors :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in (\mathbb{K}^*)^p$, $\mathrm{rg}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{rg}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_p x_p)$.
- $\forall (\lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\mathrm{rg}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{rg}(x_1, x_2 + \lambda_2 x_1, ..., x_p + \lambda_p x_1)$.
- $\forall (\alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$, $\mathrm{rg}(x_1, x_2, ..., x_p) = \mathrm{rg}(x_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i x_i, x, ..., x_p)$.

c. Théorème de la base incomplète :

Théorème : *de la base incomplète.*

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Corollaire :

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, tout sous-espace vectoriel possède un supplémentaire.

d. Dimension de la somme :

Propriété :

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension finie.
- Si $F \cap G = \{0\}$, on a $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.
- Pour F et G quelconques, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$ (c'est la *formule de Grassmann*).

Corollaire :

Soit H un sev de E. H est un hyperplan ssi $\dim H = \dim E - 1$.

IV – Applications linéaires en dimension finie

1. Rang d'une application linéaire

Dans cette partie, on considère E et F deux espaces vectoriels.

a. Définition :

Propriété et définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E ou F est de dimension finie, alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie et la dimension de $\operatorname{Im} u$ est appelée rang de u, noté $\operatorname{rg}(u)$.

De plus, si E est de dimension finie n, alors $\operatorname{rg}(u) \leq n$ et si F est de dimension finie p, alors $\operatorname{rg}(u) \leq p$.

b. Théorème du rang :

Lemme :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie et G un supplémentaire de $\ker u$ dans E. La restriction de u à G définit un isomorphisme dans $\operatorname{Im} u$.

Théorème : *du rang*.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On a $\dim(\ker u) + \operatorname{rg}(u) = \dim E$.

Corollaire 1 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont de dimensions finies n et p respectivement. On a alors :
- u est injective si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = n$.
- u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = p$.

Corollaire 2 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E et F sont de même dimension finie, alors :

$$u \text{ bijective} \Leftrightarrow u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective.}$$

Corollaire 3 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est un automorphisme si et seulement si $\operatorname{rg}(u) = n$ où n est la dimension de E.

Corollaire 4 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ où E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimensions finies.
- Si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(v)$.
- Si v est un isomorphisme, alors $\ker(v \circ u) = \ker u$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$.

2. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Propriété et définition :

> Soit H un sous-espace de E.
> H est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
> Alors, l'équation $\varphi(x) = 0$ est une équation cartésienne de H.