Chapitre 15 : Matrices et systèmes linéaires

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

1. Définition

Définition :

Une matrice $n\times p$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ contenant n lignes et p colonnes.

Notations :

- Un matrice A est notée $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ ou $A=(a_{i,j})$ (quand on connait n et p par le contexte) et :

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,p} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

- Les $a_{i,j}$ sont appelés coefficients de A.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbb{K}$.

2. Opérations sur les matrices

a. Combinaisons linéaires :

Si $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit :

- la somme de A et B par : $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})$;
- le produit de A par un scalaire λ par : $\lambda A=(\lambda a_{i,j})$.

Propriété :

$\left(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour $i\in[\![1;n]\!]$ et $j\in[\![1;p]\!]$ donnés, on appelle $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ne contenant que des 0, sauf au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne où il y a un 1.

Propriété et définition :

La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique. De plus, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie np.

b. Produit :

Si $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont deux matrices, on définit le produit $AB=(c_{i,j})$ avec :

$$\forall\,(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;q]\!],\ c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}.$$

Propriétés :

Le produit matriciel est bilinéaire, c'est-à-dire que :

- si $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})\,;M\mapsto AM$ est linéaire ;
- si $B\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, l'application $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})\,;M\mapsto MB$ est linéaire.

Le produit matriciel est associatif (s'il y a lieu).

3. Matrices colonnes – Matrices lignes

Définitions :

Une matrice colonne est une matrice ne contenant qu'une seule colonne, un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Une matrice ligne est une matrice ne contenant qu'une seule ligne, un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Définition :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(X_1, X_2, ..., X_p)$ une famille de p vecteurs de E.
La matrice de la famille $(X_1, X_2, ..., X_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne contient les coordonnées de X_j dans la base $\mathcal{B}$.

4. Matrices carrées

Définitions :

Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de colonnes est égal au nombre de lignes.

Notation : On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ (au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$).

Propriété :

$\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, stable par produit.

Définitions :

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments $a_{i,i}$ sont appelés éléments ou coefficients diagonaux de A.
Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls hormis les éléments diagonaux (qui peuvent être nuls).
Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients en dessous la diagonale sont nuls, soit $\forall\, i > j$, $a_{i,j} = 0$.
Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients au dessus de la diagonale sont nuls, soit $\forall\, i < j$, $a_{i,j} = 0$.

Notations :

- Une matrice diagonale d'éléments diagonaux $a_1, a_2, ..., a_n$ est notée $\mathrm{diag}(a_1, a_2, ..., a_n)$.
- On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures respectivement.

Propriété :

$\left(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$, $\left(\mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ et $\left(\mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K}), +, \cdot\right)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stables par produit. De plus, $\dim \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = n$, $\dim \mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

5. Transposition

Définitions :

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice transposée de A, notée ${}^tA$ ou A^T, est la matrice $(a_{j,i})$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Propriétés :

- L'application de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ qui à A associe sa transposée est involutive et linéaire.
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Définitions :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On si que A est symétrique si ${}^tA = A$ et antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Notation : On note respectivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété :

Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

II – Matrices et applications linéaires

1. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et notons $(e_1, e_2, ..., e_p)$ et $(f_1, f_2, ..., f_n)$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

A toute application linéaire u de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, on peut associer une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où $a_{i,j}$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de l'image de e_j par u dans $(f_1, f_2, ..., f_n)$. On dit que A est la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Réciproquement, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut associer comme ci-dessus une unique application linéaire de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Propriété :

L'application de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qui à u associe sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est un isomorphisme (dit canonique).

Définitions :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle noyau de A, noté $\ker A$, et image de A, noté $\operatorname{Im} A$, le noyau et l'image (respectivement) de l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

2. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On peut généraliser la propriété ci-dessus. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E, $\mathcal{C} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\forall\, j \in [\![1, p]\!]$, on peut écrire $u(e_j) = a_{1,j}f_1 + a_{2,j}f_2 + ... + a_{n,j}f_n$. Ainsi, on peut associer à u une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Il est clair que la matrice A dépend des bases choisies, elle est appelée matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de l'image par u du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}$.

Propriété :

L'application $u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3. Ecriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_p)$ une base de E, $\mathcal{C}=(f_1,f_2,...,f_n)$ une base de F, $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $A=M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)=(a_{i,j})$.

$\forall\, x\in E$, on a $x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_pe_p$, en notant $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$ et Y les vecteurs colonnes associés à x et u(x) :

$$Y=\begin{pmatrix}a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+...+a_{1,p}x_p\\a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+...+a_{2,p}x_p\\\vdots\\a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+...+a_{n,p}x_p\end{pmatrix}.$$

Et :

$$\underline{Y=AX}.$$

4. Matrice d'une forme linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base de E, $\varphi\in\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire sur E.

On vu que qu'alors, il existe n scalaires $a_1,a_2,...,a_n$ tels que $\forall\, x=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n\in E$, on a :

$$\varphi(x)=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est alors la matrice ligne $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$.

Ainsi, les matrices lignes s'identifient aux formes linéaires sur E, muni d'une base $\mathcal{B}$.

On peut alors définir la <u>matrice d'une famille finie de formes linéaires</u>, dans une base donnée. Si $(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_p)$ sont p formes linéaires sur E, alors la matrice de cette famille dans une base donnée de E set la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les lignes sont les matrices des φ_i.

5. Matrice d'un endomorphisme

Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_n)$ une base de E et $u\in\mathcal{L}(E)$, alors on note $M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B}}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de l'image par u du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base $\mathcal{B}$.

L'application $u\mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

6. Produit de matrices et composition

Propriété :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.
Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases respectives de E, F et G, on a :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v)\, M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u).$$

III – Matrices carrées inversibles

1. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$

Définition :

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Propriété et définition :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors la matrice B de la définition précédente est unique. Elle est appelée inverse de A, , notée A^{-1}.

Définition :

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire, noté $GL_n(\mathbb{K})$.

2. Matrices inversibles et automorphismes

Propriétés :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi l'endomorphisme de E associé à A dans $\mathcal{B}$ est bijectif.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $u \in GL(E)$ ssi $M_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$. Et dans cas, on a $M_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}}(u)^{-1}$.

Propriété :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure, alors A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Propriétés :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.

3. Opérations

Propriété :

$(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe (non commutatif). D'où le nom « *groupe* » linéaire…

De plus, $\forall\,(A,B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ est inversible. Et dans ce cas, on $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Corollaire :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire inférieure, alors A est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

IV – Changement de base

1. Matrices de passage

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E.

Alors, $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, on a $f_j = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + ... + a_{n,j}e_n$ (les $a_{i,j}$ étant les coordonnées de f_j dans $\mathcal{B}$).

Définition :

Les relations précédentes définissent une matrice $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Propriétés :

- *Relation de Chasles* : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.
- $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

2. Effet d'un changement de base

a. Effet sur les coordonnées d'un vecteur :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E et $x \in E$.

Si $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, on a :

$$\boxed{X = PX'}$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

b. Effet sur la matrice d'une application linéaire :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On note $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Remarque : Dans ce cas, on dit que les matrices A et B sont équivalentes.

Cas particulier :

Si φ est une forme linéaire sur E, de matrices lignes L et L' dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a, $\forall\, x \in E$ avec les notations précédentes, $\varphi(x) = LX = L'X'$ donc $LPX' = L'X'$ et :

$$\boxed{L' = LP}$$

c. Effet sur la matrice d'un endomorphisme :

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si on note $A = M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = M_{\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Définition :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Propriété :

$\forall (A,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$.

V – Opérations élémentaires sur les matrices

1. Définitions

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, L_2, ..., L_n$ les lignes de A et $C_1, C_2, ..., C_p$ ses colonnes.

Définitions :

On appelle opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes de A les manipulations suivantes :

- multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul (*codage* : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- addition d'un multiple d'une ligne αL_j à une autre, L_i (*codage* : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- échange de deux lignes L_i et L_j (*codage* : $L_i \leftrightarrow L_j$).

On appelle opérations (ou manipulations) élémentaires sur les colonnes de A les manipulations similaires sur les colonnes (*codées* : $C_i \leftarrow \alpha C_i$, $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$).

2. Interprétation en termes de produits matriciels

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier la $i^{ème}$ ligne L_i de A par $\alpha \neq 0$ (opération : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) revient à transformer A en $D_i(\alpha)A$ avec $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$.
- Additionner αL_j à la $i^{ème}$ ligne L_i de A (opération : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) revient à transformer A en $T_{i,j}(\alpha)A$ avec $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$.
- Echanger les $i^{ème}$ et $j^{ème}$ lignes L_i et L_j de A (opération : $L_i \leftrightarrow L_j$) revient à transformer A en $X_{i,j}A$ avec $X_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.

Et :

- Multiplier une colonne C_i de A par $\alpha \neq 0$ (opération : $C_i \leftarrow \alpha C_i$) revient à transformer A en $AD_i(\alpha)$.
- Ajouter αC_j à la $i^{ème}$ colonne C_i de A (opération : $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$) revient à transformer A en $AT_{j,i}(\alpha)$.
- Echanger les colonnes C_i et C_j de A (opération : $C_i \leftrightarrow C_j$) revient à transformer A en $AX_{i,j}$.

Définitions et propriétés :

Les matrices du type $D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$ avec α scalaire non nul sont appelées matrices de dilatation.

Elles sont inversibles, d'inverse $D_i\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = I_n + \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)E_{i,i}$.

Les matrices du type $T_{i,j}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et α scalaire non nul sont appelées matrices de transvection. Elles sont inversibles, d'inverse $T_{i,j}(-\alpha) = I_n - \alpha E_{i,j}$.

Les matrices du type $X_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ sont appelées matrices de transposition. Elles sont inversibles, d'inverse elles-mêmes.

Propriété :

Effectuer une opération élémentaire sur les lignes (*resp.* sur les colonnes) revient à multiplier A à gauche (*resp.* à droite) par une matrice d'opération élémentaire (inversible).

Définitions :

Deux matrices A et A' sont dites équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

Deux matrices A et A' sont dites équivalentes par colonnes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes. On note alors $A \underset{C}{\sim} A'$.

Propriété :

Deux matrices A et B sont équivalentes par lignes (*resp.* par colonnes) si et seulement s'il existe une matrice E, produit de matrices d'opérations élémentaires telle que $B = EA$ (*resp.* $B = AE$).

3. Echelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

a. Matrices échelonnées :

Définitions :

Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

i. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
ii. A partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

b. Algorithme du pivot de Gauss-Jordan :

Théorème et définition :

Toute matrice non nulle est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Autrement dit, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $E \in GL_n(\mathbb{K})$, produit de matrices d'opérations élémentaires sur les lignes et une unique matrice échelonnée réduite par lignes $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = ER$. La suite d'opérations élémentaires sur les lignes permettant de passer de A à R est appelée algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Corollaire :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut transformer A en une matrice triangulaire supérieure par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes uniquement.

4. Application à l'inversion d'une matrice carrée

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible $\Leftrightarrow$ $A \underset{L}{\sim} I_n$.

VI – Rang d'une matrice

1. Définition

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang de l'application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A.

Propriétés :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

- Si $(x_1, x_2, ..., x_r)$ est une famille de E, on a $\mathrm{rg}(x_1, x_2, ..., x_r) = \mathrm{rg}\left(M_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_r)\right)$.
- Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}\left(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\right)$.

2. Rang et inversibilité

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Propriété :

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

- $\forall M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M)$.
- $\forall M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{rg}(MA) = \mathrm{rg}(M)$.

Corollaire :

Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.

3. Caractérisation

a. Rang d'une matrice échelonnée :

Propriété :

Le rang d'une matrice échelonnée par lignes est égal au nombre de ses pivots.

b. Rang d'une matrice quelconque :

Propriété :

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au nombre de pivots de la matrice obtenue en transformant A en une matrice échelonnée par lignes par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes.

c. Autre méthode de caractérisation :

Notation : Les entiers n et p étant fixés, pour tout entier r inférieur à n et p, on note $J_{n,p,r}$ la matrice $(\alpha_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq r \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Théorème :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. A est de rang r si et seulement s'il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = UJ_{n,p,r}V.$$

Corollaires :

- Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. On a $rg(A) = rg(B)$ si et seulement s'il existe $U \in GL_n(\mathbb{K})$ et $V \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $B = UAV$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $rg({}^tA) = rg(A)$.

VII – Systèmes linéaires

1. Définitions et interprétations

Définitions :

Une équation linéaire à p inconnues est une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p = b_1.$$

Un système linéaire à p inconnues et n équations est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où les x_1 sont les inconnues et les $a_{i,j}$ et b_j sont des scalaires fixés.

Le système (linéaire) homogène associé est le système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Une solution d'un système linéaire est un p-uplet de $\mathbb{K}^p$ qui vérifie le système.

Résoudre le système est chercher l'ensemble de ses solutions.

Interprétation matricielle :

Pour un système linéaire (S) tel que ci-dessus, si on pose $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système se récrit :

$$AX = B$$

où l'inconnue est $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ ($\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ étant ici identifié à $\mathbb{K}^p$).

Définitions :

Avec les notations ci-dessus, A est la matrice associée à (S), B est appelé le second membre du système. Le système homogène associé, $AX = 0$, est dit sans second membre.

La matrice A à laquelle on rajoute B pour dernière colonne est appelée matrice augmentée, notée $(A \mid B)$.

Interprétation vectorielle :

Si on note $C_1, C_2, ..., C_p$ les vecteurs colonnes de A, alors le système s'écrit :

$$x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_pC_p = B.$$

Interprétation en termes d'applications linéaires :

Si on appelle u l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A, et b le vecteur de $\mathbb{K}^n$ de coordonnées $(b_1, b_2, ..., b_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors le système se récrit :

$$u(x) = b$$

avec x vecteur inconnu de $\mathbb{K}^p$ (cf. les équations linéaires vues dans le chapitre d'algèbre).

2. Opérations élémentaires sur les lignes, systèmes équivalents

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont définies et notées de la même manière que les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

- multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul (*codage* : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- addition d'un multiple d'une ligne αL_j à une autre, L_i (*codage* : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- échange de deux lignes L_i et L_j (*codage* : $L_i \leftrightarrow L_j$).

Définition :

> Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Propriété :

> Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

3. Résolution

a. Systèmes échelonnés, inconnues principales et secondaires :

Définitions :

> On dit qu'un système est échelonné si sa matrice associée est échelonnée par lignes. Dans un tel système, le premier coefficient non nul d'une ligne est encore appelé pivot.
>
> Dans un système échelonné, les inconnues que multiplient les pivots sont appelées inconnues principales. les autres inconnues sont appelées inconnues secondaires ou paramètres.

Propriété :

> Tout système est équivalent à un système échelonné.

b. Systèmes compatibles et incompatibles :

Définitions :

> On dit qu'un système échelonné est incompatible s'il contient une ligne sans inconnue présentant une égalité fausse. On dit qu'un système est incompatible s'il est équivalent à un système échelonné incompatible. Dans le cas contraire, on dit que le système est compatible.

Propriétés :

> Un système linéaire est incompatible si et seulement s'il n'admet pas de solution.
>
> Un système linéaire est compatible si et seulement s'il admet au moins une solution.

c. Rang d'un système :

Définition :

Le rang d'un système linéaire (S) est le rang de la matrice A associée au système.

Propriétés :

- Deux systèmes équivalents ont même rang.
- Le rang d'un système échelonné est égal au nombre de ses pivots.

Propriété :

- Le rang d'un système est égal au nombre d'inconnues principales.
- Le nombre de paramètres est égal au nombre d'inconnues moins son rang.

d. Ensemble des solutions d'un système :

Propriété :

Soit (S) un système linéaire à p inconnues et n équations de rang r et (S_o) le système homogène associé.

- L'ensemble F des solutions de (S_o) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p-r$.
- L'ensemble $\mathfrak{F}$ des solutions de (S) est soit vide, soit de la forme $\mathfrak{F} = x_o + F = \{x_o + x \setminus x \in F\}$ où x_o est une solution particulière de (S).

4. Systèmes de Cramer

Propriété et définition :

Avec les notations précédentes, si $n = p = r$, alors le système (S) admet une unique solution et dans ce cas on dit que c'est un système de Cramer.