Chapitre 16 : Déterminants

I – Formes multilinéaires

Dans cette partie, on considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions

Définition :

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Une forme p-linéaire sur E est une application $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$ telle que $\forall k \in [\![1;p]\!]$ et $\forall (x_1,...,x_p)\in E^p$, l'application $\varphi_k : E \to \mathbb{K}\,;\, x \mapsto \varphi(x_1,...x_{k-1},x,x_{k+1},...,x_p)$ est linéaire.

Si $p=2$, on parle de forme bilinéaire ; si $p=3$, on parle de forme trilinéaire.

Notation : On note $\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E.

2. Formes multilinéaires alternées et antisymétriques

Définitions :

Soit φ une forme p-linéaire sur E.

- On dit que φ est alternée si $\forall (x_1,x_2,...x_p)\in E^p$, $\varphi(x_1,x_2,...,x_p)=0$ dès que deux vecteurs parmi les x_k sont égaux.
- On dit que φ est antisymétrique si $\forall (x_1,x_2,...x_p)\in E^p$, $\varphi(...,x_i,...,x_j,...)=-\varphi(...,x_j,...,x_i,...)$ quels que soient i et j distincts entre 1 et p.

Propriété :

Une forme p-linéaire sur E est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

II – Déterminants

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

Théorème et définition :

L'ensemble $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
De plus, il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur une base $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ donnée de E. Cette forme n-linéaire est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$, notée $\det_{\mathcal{B}}$.

Si $\mathcal{F}=(x_1,...,x_n)$ est une famille de n vecteurs de E, le déterminant de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ est $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})=\det_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_n)$.

Propriétés :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B}$ une base de E et deux vecteurs X et X' de coordonnées (x,y) et (x',y') dans $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(X,X')=xy'-x'y.$$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E et trois vecteurs X, X' et X'' de coordonnées (x,y,z), (x',y',z') et (x'',y'',z'') dans $\mathcal{B}$. On a :

$$\det_{\mathcal{B}}(X,X',X'')=x''yz'-x''y'z+x'y''z-xy''z'+xy'z''-x'yz''.$$

Propriétés :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On a :
- $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$.
- $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

2. Déterminant d'une matrice carrée

a. Définition :

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A, noté $\det A$, est le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notation : Si $A = (a_{i,j})$, on note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

b. Déterminant 2×2 :

On a :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Interprétation géométrique :

Dans le plan, pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|.\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c. Déterminant 3×3 :

On a :

$$\det \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x''y'z + x'y''z - xy''z' + xy'z'' - x'yz''.$$

Interprétation géométrique :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Remarque : On a la formule : $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$.

3. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème et définition :

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ et est appelé déterminant de f, noté $\det f$.

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E :

$$\det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{F})\right) = \det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{B})\right) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On a $\det f = \det_{\mathcal{B}}\left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)$.

III – Propriétés des déterminants

1. Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette partie, on considère une base $\mathcal{B}$ de E.

$\forall (x_1, x_2, ... x_p) \in E^p$:

- $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_k sont égaux ;
- $\det_{\mathcal{B}}(..., x_i, ..., x_j, ...) = -\det_{\mathcal{B}}(..., x_j, ..., x_i, ...)$ quels que soient i et j distincts entre 1 et p.

Propriétés :

$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$:

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n) = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- On ne change pas la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs x_i une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.
- Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$.

2. Caractérisation des bases

Théorème :

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

3. Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Propriétés :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

- Pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E, $\det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{F})\right) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.

Propriété :

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On a :

$$\det(u \circ v) = \det u \times \det v.$$

Propriété :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un automorphisme de E si et seulement si $\det f \neq 0$. Et dans ce cas, $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$.

4. Propriétés du déterminant d'une matrice

Propriétés :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A possède deux colonnes identiques, alors $\det A = 0$.
- Si $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les colonnes de A, alors $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\det A' = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det A$ où A' est la matrice obtenue en multipliant chaque colonne i de A par λ_i.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- On ne change pas la valeur de $\det A$ en ajoutant à l'une des colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes.

Propriétés :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\det AB = \det BA = \det A \times \det B$.
- $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det A \neq 0$, et dans ce cas, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
- Si A et B sont semblables elles ont le même déterminant.
- $\det {}^t A = \det A$.

IV – Calcul pratique d'un déterminant

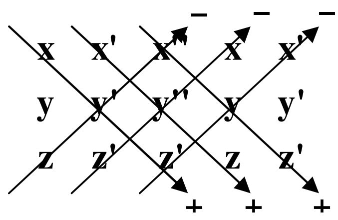
1. Calcul en dimensions 2 et 3

On a vu que :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x''y'z + x'y''z - xy''z' + xy'z'' - x'yz''.$$

Règle de Sarrus : Pour calculer un déterminant en dimension 3.

C'est une méthode pour calculer simplement un déterminant 3×3. Elle consiste à écrire les 3 colonnes du déterminant, puis à recopier les 2 premières à la suite. On effectue le produit des termes des 6 diagonales, puis on les ajoute en les dotant d'un signe suivant le schéma suivant :



2. Déterminant d'une matrice diagonale

Propriété :

Si $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ alors $\det A = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$.

3. Effet des opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'un déterminant

Propriétés :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

- multiplier une colonne de A par α multiplie le déterminant par α ;
- ajouter αC_j à C_i ne change pas le déterminant ;
- échanger deux colonnes transforme le déterminant en son opposé.

Propriété :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire de coefficients diagonaux $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alors $\det A = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$.

4. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Propriétés et définitions :

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

- $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, on a $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$. Cette façon de de procéder s'appelle développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne.
- $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, on a $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$. Cette façon de de procéder s'appelle développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.

V – Applications du déterminant aux systèmes de Cramer

Propriété :

Un système linéaire $n \times n$ de matrice associée A est de Cramer si et seulement si $\det A \neq 0$ et dans ce cas, l'unique solution est le n-uplet $\left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_n}{\det A}\right)$ où $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, A_i est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par B.