Chapitre 17 : Intégration sur un segment

I – Fonctions en escalier

Dans cette partie, on considère un segment $[a,b]$ avec $a<b$.

1. Subdivision d'un segment

Définitions :

Une subdivision du segment $[a,b]$ est une famille $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ telle que $a_0=a$, $a_n=b$ et $\forall k\in[\![0;n-1]\!]$, $a_k<a_{k+1}$.

Une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ de $[a,b]$ est dite régulière si $\forall k\in[\![0;n-1]\!]$, $a_{k+1}-a_k=c$ avec c fixé.

Si $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ et $\sigma'=(a'_0,a'_1,...,a'_m)$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, σ' est dite plus fine que σ si $\{a_0,a_1,...,a_n\}\subset\{a'_0,a'_1,...,a'_m\}$.

Propriété :

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors $\sigma\cup\sigma'$ est une subdivision de $[a,b]$. De plus, cette subdivision est plus fine que σ et σ'.

2. Fonctions en escalier

Définitions :

Un fonction φ définie sur $[a,b]$ est dite en escalier, s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,...a_n)$ de $[a,b]$ telle que $\forall k\in[\![0;n-1]\!]$, φ est constante sur $]a_k,a_{k+1}[$. Dans ce cas, la subdivision σ est dite adaptée ou subordonnée à φ.

Notation : On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

$(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, stable par produit.

3. Approximation d'une fonction continue

Théorème :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe des fonctions φ et ψ, en escalier sur $[a,b]$ telles que $\forall x\in[a,b]$:

$$\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x) \text{ et } |\psi(x)-\varphi(x)|\le\varepsilon.$$

II – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

a. Définition :

Propriété et définition :

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, telle que $\forall k\in[\![0;n-1]\!]$, $f(x)=b_k$ sur $]a_k,a_{k+1}[$. La quantité $I=\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k$ est indépendante de la subdivision σ choisie et est appelée intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]}f$.

Interprétation graphique :

- Si f est une fonction en escalier et positive sur $[a,b]$, $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire de la surface comprise entre l'axe des x, $\mathscr{C}$ et les droites verticales passant par a et b.
- Si f est de signe quelconque, $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire de la surface au comprise entre l'axe des x, la partie de $\mathscr{C}$ au dessus de (Ox) et les droites verticales passant par a et b, moins l'aire de la surface au comprise entre l'axe des x, la partie de $\mathscr{C}$ au dessous de (Ox) et les droites verticales passant par a et b.
- Si f est de signe constant l'intégrale est l'*aire algébrique* entre la courbe et les axes.

b. Propriétés :

Propriété :

> Soit f une fonction constante sur $[a,b]$ telle que $\forall\, x \in [a,b],\ f(x)=\lambda$. On a $\int_{[a,b]} f = (b-a)\lambda$.

Propriété : *Linéarité de l'intégrale.*

> Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$. $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a :
>
> $$\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_{[a,b]} f+\mu\int_{[a,b]} g.$$

Propriétés : *Positivité et croissance de l'intégrale.*

> Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$.
>
> - Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
> - Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Propriété : *Relation de Chasles.*

> Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $c\in[a,b]$.
>
> La fonction f est en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$, et $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Posons :

- $E^- = \left\{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \setminus \varphi \leq f\right\}$ et $I^- = \left\{\int_{[a,b]} \varphi \setminus \varphi \in E^-\right\}$.
- $E^+ = \left\{\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \setminus \varphi \geq f\right\}$ et $I^+ = \left\{\int_{[a,b]} \varphi \setminus \varphi \in E^+\right\}$.

Propriété et définition :

> On a $\sup I^- = \inf I^+$ et cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]} f$.

3. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

a. Propriétés générales :

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

- *Linéarité de l'intégrale* : $\forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2$, on a $\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_{[a,b]} f+\mu\int_{[a,b]} g$.
- *Positivité* : Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- *Croissance de l'intégrale* : Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- *Inégalité de la valeur absolue* : $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- *Relation de Chasles* : $\forall\, c\in [a,b]$, $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.

b. Valeur moyenne :

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f .$$

Propriété : *Inégalités de la moyenne.*

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$.

- Si m est un minorant et M est un majorant de f sur $[a,b]$, alors $m \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leq M$.
- Si g est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$.

c. Fonction continue d'intégrale nulle :

Propriété :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. On a :

$$\int_{[a,b]} f = 0 \iff f = 0 .$$

d. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On a :

$$\left(\int_{[a,b]} f\times g\right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\times\left(\int_{[a,b]} g^2\right).$$

Et il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles ($\exists\, k\in\mathbb{R}$, tel que $f = kg$ ou $g = kf$).

4. Extension à l'intégrale entre deux points d'un intervalle quelconque

Définitions :

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. $\forall\,(a,b)\in I^2$, on appelle intégrale de f entre a et b, notée $\int_a^b f(t)dt$, la quantité définie par :

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a \le b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } a \ge b \end{cases}$$

5. Calculs d'intégrales

Les propriétés qui suivent sont des rappels du chapitre sur les primitives.

Théorème :

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $a \in I$. f admet des primitives sur I et la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, définie sur I, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Propriété : *Intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, $\forall\,(a,b)\in I^2$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

Propriété : *Changement de variable*

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et à valeurs dans I, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta \varphi'(u) f\big(\varphi(u)\big)\,du.$$

III – Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Sommes de Riemann

Définition :

Soient f une fonction définie sur $[a,b]$, $\sigma = (a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et $(c_0,...,c_{n-1})$ tel que $\forall\, k \in [\![0;n-1]\!]$, $c_k \in [a_k, a_{k+1}]$. On appelle somme de Riemann de f associée à σ et aux c_k la quantité :

$$S(f,\sigma,c_0,...,c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) f(c_k).$$

Propriété et définition :

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\forall\,\varepsilon > 0$, on peut approcher $\int_{[a,b]} f$ par une somme de Riemann de f à ε près. C'est ce qu'on appelle la méthode des rectangles pour estimer une intégrale.

Propriété :

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, avec $\forall\, k \in [\![1;n]\!]$, $a_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma,a_0,...,a_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \int_{[a,b]} f.$$

Cas où f *est* k-*lipschitzienne sur* $[a,b]$: On a :

$$\boxed{\left|\int_{[a,b]} f - R_n(f)\right| \le k\frac{(b-a)^2}{n}}$$

2. Méthode des trapèzes

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ une subdivision régulière de $[a,b]$.

On a appelle g_n la fonction définie sur $[a,b]$ telle que $\forall\, k \in [\![0;n]\!]$, $g_n(a_k) = f(a_k)$ et g_n est affine $[a_k, a_{k+1}]$ (g_n est affine par morceaux), soit $\forall\, x \in [a_k, a_{k+1}]$:

$$g_n(x) = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k}(x - a_k) + f(a_k).$$

$\forall\, \varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \ge N$, $|f - g_n| \le \varepsilon$ sur $[a,b]$ (*on l'admet*). Alors, on a :

$$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} g_n\right| \le \int_{[a,b]} |f - g_n| \le \varepsilon(b-a).$$

Ainsi, $\int_{[a,b]} g_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_{k+1}) + f(a_k)}{2}$ est une estimation de $\int_{[a,b]} f$.

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. $\forall\, (a,b) \in I^2$, on appelle intégrale de f entre a et b, la quantité définie par :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)dt$$

Propriétés :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$. On a :

- *Inégalité en modules* : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$.
- *Inégalité de la moyenne (en modules)* : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le (b-a)\sup|f|$.