Chapitre 18 : Séries Numériques

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

1. Vocabulaire

Définitions :

Soit $(u_n)_{n\geq n_o}$ une suite réelle ou complexe. La série associée à u (à termes réels ou complexes), notée Σu_n, est la suite de terme général $S_n = \sum_{k=n_o}^{n} u_k$. On dit que la série associée à u est la série de terme général u_n. Dans ce cas, S_n est appelé somme partielle d'indice ou d'ordre n de la série associée à u.

On dit que la série est convergente ou converge si la suite $(S_n)_{n\geq n_o}$ des sommes partielles converge.

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente ou diverge.

En cas de convergence, la limite S de $(S_n)_{n\geq n_o}$ est appelée somme de la série et est notée $S = \sum_{n=n_o}^{+\infty} u_n$.

Toujours dans ce cas, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n_o}^{n} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série.

2. Propriétés

Propriété :

Soit Σu_n et Σv_n deux séries convergentes. $\forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{K}^2$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. La somme est linéaire.

Propriété et définition :

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Quand le terme général s'une série ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Propriété :

Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Propriété :

Soit une série Σu_n à termes complexes.

$$\Sigma u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \Sigma \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \Sigma \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent } \Leftrightarrow \Sigma \overline{u}_n \text{ converge}$$

II – Séries à termes positifs

1. Comparaison

Propriété :

Une série à termes réels et positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Dans le cas contraire, la série diverge vers + ∞.

Propriété :

Soient Σu_n et Σv_n deux séries réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

Si Σv_n converge, alors Σu_n converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Si Σu_n diverge, alors Σv_n diverge.

Propriété :

Soient Σu_n et Σv_n deux séries réelles.
Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors Σu_n et Σv_n sont de même nature (convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux).

2. Comparaison série-intégrale

Propriété :

Soit Σu_n une série telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Σu_n converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Quand $\int_0^n f(t)\,dt \to +\infty$: $\boxed{S_n \sim \int_0^n f(t)\,dt}$

Quand $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : $\boxed{0 \leq (I - I_n) - R_n \leq u_n}$

III - Séries de référence

1. Séries géométriques

On les a vues plus haut.

2. Séries exponentielles

Propriété :

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$.

3. Séries de Riemann

Propriété et définition :

Pour α un réel fixé, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée <u>série de Riemann</u>.

Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

IV - Séries absolument convergentes

1. Définition

Définition :

Soit Σu_n une série à termes réels ou complexe.

On dit que la série est <u>absolument convergente</u> si $\Sigma |u_n|$ est convergente.

2. Propriétés

a. Théorème fondamental :

Théorème :

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

b. Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente :

Propriété :

Soit Σu_n une série absolument convergente. On a alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

c. Comparaison :

Propriété :

Soient (u_n) est une suite complexe et (v_n) est une suite réelle et positives.

Si $u_n = O(v_n)$ et si Σv_n converge, alors Σu_n est convergente.

d. Règle de d'Alembert :

Propriété :

Soient Σu_n est une série à termes non nuls telle que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

- Si $\ell < 1$, alors Σu_n converge.
- Si $\ell > 1$, alors Σu_n diverge.

V - Application au développement décimal d'un nombre réel

Propriété et définition :

Tout réel $x \in [0;1[$ admet un unique développement décimal $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n}$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $c_n \in [\![0,9]\!]$ et (c_n) non stationnaire sur 9. Ce développement est appelé développement décimal propre de x.

Propriété :

Un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.