Chapitre 19 : Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

Dans tout ce chapitre, E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *.*

I – Produit scalaire

1. Définition

Définition :

On appelle produit scalaire sur E toute application φ de E² dans $\mathbb{R}$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :

- φ est bilinéaire : $\forall\,(x,x',y,y')\in E^4$ et $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:
$$\varphi(\lambda x+\mu x',y)=\lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x',y) \text{ et } \varphi(x,\lambda y+\mu y')=\lambda\varphi(x,y)+\mu\varphi(x,y').$$
- φ est symétrique : $\forall\,(x,y)\in E^2,\ \varphi(x,y)=\varphi(y,x)$.
- φ est positive : $\forall\,x\in E,\ \varphi(x,x)\geq 0$.
- φ est définie : $\forall\,x\in E,\ \varphi(x,x)=0 \iff x=0$.

Notations : On note souvent $\varphi(x,y)=(x\,|\,y)$ ou $\langle x\,|\,y\rangle$ ou $\langle x,y\rangle$.

Exemples fondamentaux :

1) Dans $\mathbb{R}^n$, $(x\,|\,y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ avec $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.
2) Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $(f\,|\,g)=\int_a^b fg$.
3) Dans $\mathbb{R}[X]$, $(P\,|\,Q)=\int_0^1 PQ$.

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Propriété :

Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$, alors $\forall\,(x,y)\in E^2$, on a :
$$\left|(x\,|\,y)\right|\leq\sqrt{(x\,|\,x)(y\,|\,y)}.$$
Et on a égalité si et seulement si la famille (x,y) est liée.

3. Norme euclidienne

a. Définition :

Définition :

On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall\,x\in E$ et $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}$, $N(\lambda x)=|\lambda|\,N(x)$ (homogénéité) ;
- $\forall\,x\in E$, $N(x)=0\iff x=0$;
- $\forall\,(x,y)\in E^2$, $N(x+y)\leq N(x)+N(y)$ (inégalité triangulaire).

Théorème et définition :

Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$, alors l'application $x\mapsto\sqrt{(x\,|\,x)}$ est une norme sur E, appelée norme euclidienne associée au produit scalaire.

b. Distance associée à une norme :

Définition :

Si E est muni d'une norme N. L'application d de E² dans $\mathbb{R}_+$ définie $\forall (x,y) \in E^2$ par $d(x,y) = N(x-y)$ est appelée distance associée à la norme N.

Si de plus, N est une norme euclidienne, on dit que d est une distance euclidienne.

Propriétés :

Si d est une distance sur E associée à une norme N, on a, $\forall (x,y,z) \in E^3$:

- $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie).
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation).
- $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

c. Identités de polarisation :

Propriétés :

Si E est muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de norme associée $\|\cdot\|$, on a $\forall (x,y) \in E^2$:

- $\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2(x|y)$.
- $\| x-y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2(x|y)$.
- $\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 = 4(x|y)$.
- $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\left(\| x \|^2 + \| y \|^2\right)$ (*identité du parallélogramme*).
- $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\left(2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 - \| x-y \|^2\right)$ (*théorème de la médiane*).

4. Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Définition :

Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Si de plus, cet espace est de dimension finie, alors c'est un espace euclidien.

II – Orthogonalité

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, E est un espace préhilbertien réel. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Vecteurs orthogonaux, vecteurs unitaires

Définitions :

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $(x|y) = 0$, on note alors $x \perp y$.

Un vecteur x de E est dit unitaire s'il est de norme 1.

Une famille F de vecteurs de E est orthogonale si $\forall (x,x') \in F^2$ tel que $x \neq x'$, on a $(x|x') = 0$ (autrement dit si tous les vecteurs sont orthogonaux deux à deux).

Une famille de vecteurs de E est orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.

<u>*Propriété*</u> :

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

<u>*Propriété*</u> : *Relation de Pythagore.*

Si $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors :

$$\| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + ... + \| x_p \|^2 = \| x_1 + x_2 + ... + x_p \|^2 .$$

Et, dans le cas de deux vecteurs, la réciproque est vraie : si $\| x \|^2 + \| y \|^2 = \| x + y \|^2$ alors $x \perp y$.

2. Sous-espaces vectoriels orthogonaux

<u>*Définitions*</u> :

Soient F et G deux sev de E. On dit que F et G sont <u>orthogonaux</u> si $\forall (x, y) \in F \times G$, $(x \mid y) = 0$.

Si A est une partie non vide de E, l'ensemble $\{x \in E \setminus \forall a \in A, (a \mid x) = 0\}$ est appelé <u>orthogonal de A</u>, noté $A^\perp$.

<u>*Propriétés*</u> :

- $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.
- $F \perp G \Leftrightarrow F \subset G^\perp \Leftrightarrow G \subset F^\perp$.

Si A est une partie non vide de E.

- $A^\perp$ est un sev de E.
- Si B est une autre partie de E telle que $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $A^\perp = (\text{Vect}\, A)^\perp$.
- $A \cap A^\perp$ est vide si A ne contient pas 0 et réduit à $\{0\}$ sinon.

3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

<u>*Propriété*</u> : *Procédé ou algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Si $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une famille libre de E, alors il existe une famille orthonormée de E, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_k) = \text{Vect}(f_1, f_2, ..., f_k)$.

4. Bases orthonormales

Dans cette partie, E est euclidien de dimension n non nulle.

<u>*Propriétés et définition*</u> :

Toute famille orthogonale de n vecteurs non nuls de E est une base de E.
Toute famille orthonormée de n vecteurs de E est une base de E. Une telle famille est appelée <u>base orthonormale ou orthonormée</u> (b.o.n.) de E.

<u>*Théorème*</u> :

E possède des bases orthonormales et si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une telle base, alors $\forall x \in E$:

$$x = (e_1 \mid x) e_1 + (e_2 \mid x) e_2 + ... + (e_n \mid x) e_n \quad \text{et} \quad \| x \|^2 = (e_1 \mid x)^2 + (e_2 \mid x)^2 + ... + (e_n \mid x)^2 .$$

Propriété :

Toute famille orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_p)$ peut être complétée en une base orthonormale de E.

Corollaires :

Soit F un sous-espace de E.

- $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.
- $F \oplus F^{\perp} = E$.
- $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Notation : Si F et G sont deux sev tels que $F \perp G$, leur somme (directe) est notée $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

5. Produit scalaire et formes linéaires

Ici encore, on prend E euclidien de dimension n.

Propriété :

$f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $a \in E$, unique, tel $\forall x \in E,\ f(x) = (a \mid x)$. Autrement dit, toute forme linéaire sur E s'écrit de manière unique sous la forme $x \mapsto (a \mid x)$, où a est un vecteur fixé de E.

III – Projections orthogonales

Sauf mention contraire, dans cette partie comme dans la précédente, E est un espace préhilbertien réel. On note à nouveau $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Projection orthogonale

Lemme :

Soit F un sev de E, de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base orthonormée de F. $\forall x \in E$, on a :

$$x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ (x \mid e_i) = 0.$$

Théorème et définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie.

$$\forall x \in E,\ \exists!\, x_F \in F \text{ tel que } x - x_F \in F^{\perp}.$$

Le vecteur x_F est appelé projeté orthogonal de x sur F et l'application p_F de E dans E qui à x associe x_F est linéaire et est appelée projection orthogonale sur F.

Propriété :

Soient F un sev de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. Si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base orthonormale de F, alors $\forall x \in E$:

$$p_F(x) = (e_1 \mid x)e_1 + (e_2 \mid x)e_2 + ... + (e_p \mid x)e_p.$$

Propriétés :

Soient F un sev de E, de dimension finie.

- $F \oplus F^{\perp} = E$.
- La projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Propriété : *Inégalité de Bessel*

Soient F un sev de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. $\forall\, x \in E$, $\| p_F(x) \| \leq \| x \|$ avec égalité si et seulement si $x \in F$.

2. Distance à un sous-espace vectoriel

Propriété et définition :

Soient A une partie non vide de E et $x_o \in E$. L'ensemble $\{\| a - x_o \| \setminus a \in A\}$ admet une borne inférieure appelée distance de x_o à A, notée $d(x_o, A)$.

Propriété :

Soient F un sev de E, de dimension finie et p_F la projection orthogonale sur F. Alors $\forall\, x \in E$, on a :

$$d(x, F) = \| x - p_F(x) \|.$$