Chapitre 20 : Variables Aléatoires

I - Variables aléatoires sur un univers fini

1. Définition

Définitions :

> Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
>
> Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (var).

2. Loi d'une variable aléatoire

Propriété et définition :

> L'application $P_X : \mathscr{P}\left(X(\Omega)\right) \to [0;1]\,;A \mapsto P(X \in A)$ est une loi de probabilité sur $X(\Omega)$, appelée loi de la variable aléatoire X.

3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition :

> Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, à valeurs dans un ensemble E et f une application définie sur E et à valeurs dans un ensemble F. La variable aléatoire $f \circ X$, définie sur Ω et à valeurs dans F, est appelée image de X par f, notée $f(X)$.

II - Lois usuelles

1. Loi uniforme

Si X est une variable aléatoire sur Ω (univers muni d'une loi P), la loi P_X peut être uniforme. Dans le cas d'un univers fini, ceci veut dire que toutes les valeurs de $X(\Omega)$ ont la même probabilité, c'est-à-dire : $\exists\, p \in [0;1]$ tel que $\forall\, x \in X(\Omega)$, $P(X = x) = p$.

2. Loi de Bernoulli

Définitions :

> Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles (notées en général succès et échec).
>
> Une loi de Bernoulli est la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli.
>
> Si $p \in [0;1]$ est la probabilité de « succès », p est appelé paramètre de la loi, qui est alors notée $\mathscr{B}(p)$.

3. Loi binomiale

Définitions :

> Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire consistant à répéter une épreuve de Bernoulli plusieurs fois de suite et de manière indépendante.
>
> Une loi binomiale est la loi suivi par la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. Si l'épreuve de Bernoulli est répétée n fois et p est le paramètre associé à l'épreuve, la loi binomiale est notée $\mathscr{B}(n,p)$ et n et p sont les paramètres de cette loi.

Propriété :

Soit $\mathscr{B}(n,p)$ la loi binomiale de paramètres n et p associée à un schéma de Bernoulli et X la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue des n épreuves de Bernoulli. $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

III - Couples de variables aléatoires

Dans cette partie, X et Y désignent deux variables aléatoires sur un univers fini probabilisé Ω.

$\forall\,(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, on note $P(X=x, Y=y) = P\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$ et $\forall\,(A,B) \in \mathscr{P}(X(\Omega))\times\mathscr{P}(Y(\Omega))$, on note $P(X\in A, Y\in B) = P\big((X\in A)\cap(Y\in B)\big)$.

1. Loi conjointe

Définition :

L'application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui, à tout (x,y) de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, associe $P(X=x, Y=y)$ est appelée loi conjointe du couple (X,Y).

2. Lois marginales

Définition :

Les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et de Y.

3. Lois conditionnelles

Définition :

Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y) \neq 0$. L'application :

$$P_{(Y=y)} : X(\Omega) \to [0;1]\ ;\ x \mapsto P_{(Y=y)}(X=x)$$

est appelée loi conditionnelle de X sachant (Y = y).

IV - Variables aléatoires indépendantes

1. Couple de variables aléatoires indépendantes

Définition :

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si $\forall\,(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, on a :

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)\times P(Y=y).$$

Propriété :

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $\forall\, A \subset X(\Omega)$ et $\forall\, B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$P\big((X,Y)\in A\times B\big) = P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\times P(Y\in B).$$

Propriété :

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition :

Soit $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires sur Ω. On dit que $X_1,...,X_n$ sont indépendantes ou mutuellement indépendantes si $\forall\,(x_1,...,x_n)\in X_1(\Omega)\times...\times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1=x_1)$, ... , $(X_n=x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Propriété :

Si $X_1,...,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_1,...,A_n)\in\mathscr{P}\left(X_1(\Omega)\right)\times...\times\mathscr{P}\left(X_n(\Omega)\right)$, les événements $(X_i\in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Propriété :

Si $X_1,...,X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, à images dans $\{0,1\}$ et suivant chacune la loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+...+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

IV – Espérance, variance, écart-type

1. Espérance d'une variable aléatoire réelle

a. Définition :

Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Si $X(\Omega)=\{x_1,...,x_n\}$, on appelle espérance de X le réel :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i).$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On a :

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\{\omega\})X(\omega)$$

b. Espérance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi usuelle :

Propriété :

Soit X une variable aléatoire réelle.

- Si X est constante (avec $\forall\,\omega\in\Omega$, $X(\omega)=a$), alors $E(X)=a$.
- Si X est l'indicatrice d'une partie A de Ω, alors $E(X)=P(A)$.
- Si X suit une loi uniforme avec $X(\Omega)=\{x_1,...,x_n\}$, alors $E(X)=\frac{x_1+...+x_n}{n}$.
- Si X suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $X(\Omega)=\{a,b\}$ et $P(X=a)=p$, alors $E(X)=pa+(1-p)b$.
- Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $E(X)=np$.

c. Propriétés de l'espérance :

Propriété :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

- $\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ (l'espérance est linéaire).
- Si $\forall\,\omega\in\Omega$, $X(\omega)\le Y(\omega)$ alors $E(X)\le E(Y)$ (croissance de l'espérance).

Propriété : *Théorème du transfert*

Soit X une variable aléatoire réelle et f une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a :

$$E\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)f(x).$$

Propriété :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors $E(XY)=E(X)E(Y)$.

2. Variance et écart-type

a. Définition :

Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω avec $X(\Omega)=\{x_1,...,x_n\}$.
On appelle variance de X le réel :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\big(x_i-E(X)\big)^2.$$

On appelle écart-type de X le réel :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

b. Propriétés :

Propriété :

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω, on a :

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2.$$

Propriété :

Soit X est une variable aléatoire réelle sur Ω. $\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$V(aX+b)=a^2V(X).$$

Propriété :

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω.

- Si X est constante (avec $\forall\,\omega\in\Omega$, $X(\omega)=a$), alors $V(X)=0$.
- Si X suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $X(\Omega)=\{a,b\}$, $a\neq 0$, $b\neq a$ et $P(X=a)=p$, alors :

$$V(X)=(a-b)^2p(1-p).$$

- Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $V(X)=np(1-p)$.

Propriétés :

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω.

- *Inégalité de Markov* : Si X est positive, alors $\forall\,a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}.$$

- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev* : $\forall\,a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P\big(|X-E(X)|\geq a\big)\leq\frac{V(X)}{a^2}.$$