Chapitre 4 : Nombres réels

I – Ensemble des nombres réels

1. Ensembles usuels de nombres

Les ensembles usuels de nombres sont :

$\mathbb{N}$ = ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{Z}$ = ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{D}$ = ensemble des nombres décimaux
$\mathbb{Q}$ = ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$ = ensemble des nombres complexes

2. Nombres réels

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est muni d'une addition et d'une multiplication internes qui lui donne une structure de corps commutatif : $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^*,\times)$ sont des groupes commutatifs et la multiplication est distributive sur l'addition.

Propriété :

$\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné par la relation $\forall (a,b)\in \mathbb{R}^2,\ a\leq b \iff b-a\geq 0$.
Cette relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication, c'est-à-dire : $\forall (a,b,c,d)\in \mathbb{R}^4$,
- $a\leq b$ et $c\leq d \Rightarrow a+c\leq b+d$ (on peut additionner membres à membres des inégalités) ;
- $a\leq b$ et $c\geq 0 \Rightarrow ac\leq bc$ (on multiplier une inégalité par un réel positif).

3. Bornes supérieures, inférieures

a. Généralités :

Définitions :

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$.
On dit que a est un minorant (*resp.* majorant) de A si $\forall x\in A,\ a\leq x$ (*resp.* $x\leq a$).
Une partie possédant des minorants (*resp.* majorants) est minorée (*resp.* majorée). Une partie minorée et majorée est bornée.
Si a est un minorant (*resp.* majorant) de A et $a\in A$, a est le plus petit élément ou minimum (*resp.* plus grand élément ou maximum) de A.
S'il existe, le plus petit des majorants de A est appelé borne supérieure de A.
S'il existe, le plus grand des minorants de A est appelé borne inférieure de A.

Propriétés :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A possède une borne supérieure (*resp.* inférieure), elle est unique. On la note $\sup A$ (*resp.* $\inf A$).
Si A possède un maximum (*resp.* minimum), il est unique. On le note $\max A$ (*resp.* $\min A$).

Propriété :

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Corollaire :

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

b. Caractérisation :

Propriété :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée par M (*resp.* minorée par m).

$M = \sup A$ (*resp.* $m = \inf A$) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a \leq M$ (*resp.* $m \leq a < m + \varepsilon$).

Corollaire : Caractérisation séquentielle.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée par M (*resp.* minorée par m).

$M = \sup A$ (*resp.* $m = \inf A$) $\Leftrightarrow$ Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers M (*resp.* m).

c. Propriété d'Archimède :

Lemme :

Toute partie majorée (*resp.* minorée) de $\mathbb{Z}$ admet un maximum (*resp.* un minimum).

Propriété et définition :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > x$. On dit que $\mathbb{R}$ est archimédien.

II – Valeur absolue

1. Généralités

Définition :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x le réel positif noté $|x|$ tel que :

$$\begin{cases} \text{si } x \geq 0, & |x| = x \\ \text{si } x \leq 0, & |x| = -x \end{cases}$$

Propriétés :

$\forall x \in \mathbb{R}$:

- $|x| = \max(-x, x)$ donc $-|x| \leq x \leq |x|$.
- $|-x| = |x|$.
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et par contraposée, $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
- $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$ et par contraposée, $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
- $|x|^2 = x^2$ et $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2$.
- $\forall a \geq 0$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ et $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$.

2. Valeur absolues et opérations

Propriétés :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- $|xy| = |x|.|y|$ et si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- *Inégalités triangulaires* : $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

3. Distance

Définition :

On appelle distance usuelle dans $\mathbb{R}$, l'application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto |x - y|$.

Propriétés :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- $d(x, y) = d(y, x)$ (d est symétrique).
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

III – Intervalles

Définitions :

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

- $[a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x \leq b\}$. Ce type d'intervalle est appelé segment.
- $]a ; b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x < b\}$.
- $[a ; b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x < b\}$.
- $]a ; b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x \leq b\}$.
- $]-\infty ; a] = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq a\}$.
- $]-\infty ; a[= \{x \in \mathbb{R} \setminus x < a\}$.
- $[a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x\}$.
- $]a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x\}$.
- $]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.

Dans les quatre premiers cas, a et b sont deux réels tels que $a \leq b$ (et l'intervalle est borné) et dans les autres cas, a est un réel quelconque.

Pour $]a ; b[$, $]-\infty ; a[$ et $]a ; +\infty[$, on dit que l'intervalle est ouvert ; pour $[a ; b]$, $]-\infty ; a]$ et $[a ; +\infty[$, on dit que l'intervalle est fermé ; pour $[a ; b[$ (*resp.* $]a ; b]$), on dit que l'intervalle est semi-ouvert à droite (*resp.* à gauche).

Définition :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est convexe, si $\forall (x, y) \in A^2$ tel que $x \leq y$, on a $[x ; y] \subset A$.

Théorème :

Une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe. Autrement, les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Propriété :

L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

IV – Partie entière

1. Définition

Théorème et définition :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.
Cet entier est appelé partie entière de du réel x, notée E(x) ou [x] ou E[x] ou $\lfloor x \rfloor$ ou $\lceil x \rceil$.

Propriétés :

$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$:

- Si $y - x > 1$, alors il existe au moins un entier compris entre x et y.
- Si $y - x = 1$, alors il existe exactement un entier compris entre x et y sauf si x est entier (et y aussi).
- Si $y - x < 1$, alors il existe au plus un entier compris entre x et y.

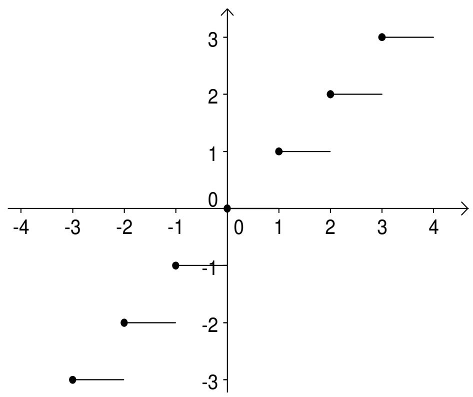
2. La fonction partie entière

La fonction partie entière est la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}\,;\, x \mapsto E(x)$.

Propriétés :

$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$, on a $E(x) \leq E(y)$.

On a la courbe :



3. Approximation décimale d'un nombre réel

Définition :

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur approchée ou approximation par défaut de x à la précision 10^{-n} le nombre décimal $d_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$ et valeur approchée ou approximation par excès de x à la précision 10^{-n} le nombre décimal $D_n = \dfrac{E(10^n x)+1}{10^n}$.