Chapitre 5 : Nombres complexes

I – L'ensemble $\mathbb{C}$

1. Définition

Définition :

> L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion contenant $\mathbb{R}$ et i (tel que $i^2 = -1$) et dans lequel les propriétés des opérations +, –, x et ÷ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Conséquences :

- Les règles de puissances, les identités remarquables, la formule du binôme de Newton fonctionnent de la même façon dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$.
- La propriété « *un produit de facteur est nul si et seulement un facteur est nul* » est valable dans $\mathbb{C}$.

Théorème :

> L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $z = x + iy$ avec x et y réels dans lequel les règles de calcul sont celles des nombres réels.

2. Rappels de Terminale

Voir feuille polycopiée.

3. Compléments

a. Inégalité triangulaire :

Propriété :

> $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :
>
> $$\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$
>
> La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si $z' = kz$ ou $z = kz'$ avec $k \in \mathbb{R}_+$.

b. Disques ouverts et fermés :

Propriété :

> Soit a un complexe fixé et $R > 0$. L'ensemble des points M, d'affixe z, du plan complexe tel que $|z - a| < R$ (*resp.* $|z - a| \leq R$) est le disque ouvert (*resp.* fermé) de centre A, d'affixe a, et de rayon R.

c. Colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs :

Propriété :

> Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont deux vecteurs d'affixes respective z et z'.
>
> - $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si $z\overline{z}' \in \mathbb{R}$.
> - $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z}' \in i\mathbb{R}$.

4. Transformations du plan

a. Généralités :

Définitions :

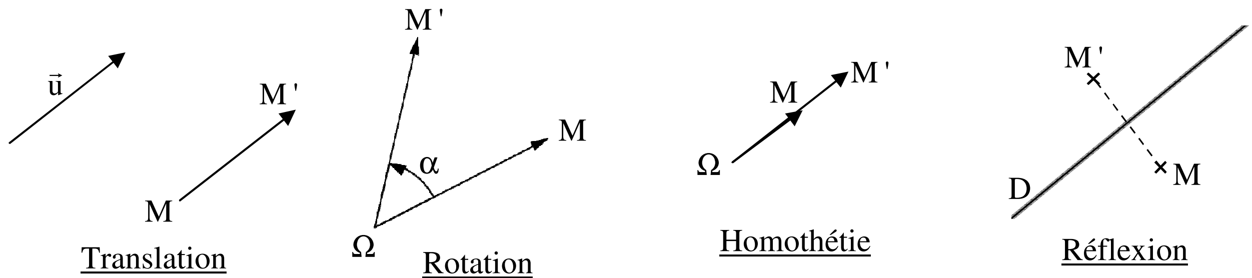
On appelle transformation du plan une bijection du plan dans lui-même.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Soient Ω un point du plan et α un réel. La rotation de centre Ω et d'angle α est l'application du plan dans lui-même qui à un point M du plan associe le point M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\,[2\pi]$ (quand $M \neq \Omega$).

Soient Ω un point du plan et k un réel non nul. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Soit D une droite du plan. La réflexion (ou symétrie axiale) d'axe D est l'application du plan dans lui-même qui à un point M associe le point M' tel que D est la médiatrice de $[MM']$ si $M \notin D$ et $M' = M$ si $M \in D$.



Translation Rotation Homothétie Réflexion

Propriétés :

Les translations, rotations, homothéties et réflexions sont des transformations du plan et :

- La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
- La réciproque d'une rotation de centre Ω et d'angle α est la rotation de même centre et d'angle – α.
- La réciproque d'une homothétie de centre Ω et de rapport k est l'homothétie de même centre et de rapport 1/k.
- La réciproque d'une réflexion (ou symétrie axiale) d'axe D est elle-même.

b. Ecriture complexe :

Définition :

L'écriture complexe d'une application du plan dans lui-même est une relation du type $z' = f(z)$ où z est l'affixe d'un point M et z' est l'affixe de son image par l'application.

Propriétés :

Soit f une application de *P* dans *P*.

- f est une translation si et seulement si son écriture complexe est $z' = z + b$. Dans ce cas, f est une translation de vecteur $\vec{u}$, d'affixe b.
- f est une rotation si et seulement si son écriture complexe est $z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$. Dans ce cas, f est une rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle α.
- f est une homothétie si et seulement si son écriture complexe est $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$. Dans ce cas, f est une homothétie de centre Ω et de rapport k est.
- L'écriture complexe de la réflexion par rapport à l'axe des abscisses (*resp.* ordonnées) est $z' = \bar{z}$ (*resp.* $z' = -\bar{z}$).

II – Groupe des nombres complexes de module 1

1. Le groupe $\mathbb{U}$

Définition :

On appelle $\underline{\mathbb{U}}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Théorème :

L'ensemble $\mathbb{U}$ est un groupe pour la multiplication. C'est-à-dire :

- Le produit de deux complexes de modules 1 est encore de module 1 ($\mathbb{U}$ est stable pour la multiplication).
- $1 \in \mathbb{U}$ et la multiplication est associative dans $\mathbb{U}$.
- L'inverse d'un complexe de module 1 est encore de module 1.

2. Forme exponentielle d'un nombre complexe de module 1

Définition :

$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Propriété :

$z \in \mathbb{U} \;\Leftrightarrow\; \exists\, \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}$.

Conséquences :

- Définition de l'argument d'un complexe .
- Formes trigonométriques et exponentielle de tout complexe non nul :

  $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ donc $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ soit $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$.

Propriété :

$\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall\, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

Corollaires :

i. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, si $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ sont n nombres réels, on a $e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\ldots e^{i\theta_n}$.

ii. *Formule de Moivre* : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, soit $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

iii. $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

iv. $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall\, \theta' \in \mathbb{R}$, on a $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$.

v. *Formules d'Euler* : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

3. Applications

d. Linéarisation :

Il s'agit d'exprimer les puissances du cosinus ou du sinus d'un angle en fonction des cosinus et sinus des multiples de cet angle. Pour cela, on utilise les formules d'Euler et du binôme de Newton.

e. Développement :

C'est le contraire, on cherche à exprimer le cosinus ou le sinus d'un multiple d'un angle en fonction des puissance du cosinus et du sinus de cet angle.

f. Formules de trigonométrie :

Formules d'addition :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\end{array}}$$

Pour a, b et $a+b$ différents de $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\boxed{\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$$

Formules de soustraction :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{array}}$$

Pour a, b et $a-b$ différents de $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\boxed{\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}}$$

Formules de produits :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos a\cos b=\frac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)\\ \sin a\sin b=\frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)\\ \cos a\sin b=\frac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big)\end{array}}$$

Formules de duplication :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a\\ \sin(2a)=2\sin a\cos a\end{array}}$$

Pour a et 2a différents de $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\boxed{\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}.$$

Formules d'addition :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\\ \sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\end{array}}$$

Formules de soustraction :

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\\ \sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\end{array}}$$

Formules avec l'angle moitié :

Pour a tel que $\frac{a}{2}$ différent de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, avec k entier, et en posant $t=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos a &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin a &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}}$$

Et pour $a \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, avec k entier :

$$\boxed{\tan a = \frac{2t}{1-t^2}}$$

Réduction de $a\cos x + b\sin x$:

Soient a et b deux réels non nuls. Il existe α tel que $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Alors, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha).$$

Cas particuliers :

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

III – Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

1. L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les racines complexes de $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces racines.

Propriété :

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0\,;n-1]\!]\}$.

Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{U}_n$ est stable par multiplication et passage à l'inverse.

2. Résolution de $z^n = a$

Propriété et définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique réel positif a tel que $a^n = r$.

Ce réel est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de r, noté $\sqrt[n]{r}$.

Propriété et définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $a = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation $z^n = a$ d'inconnue z est $z_o\mathbb{U}_n$ où $z_o = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\alpha}{n}}$.

Ces solutions sont appelées racines $n^{\text{ième}}$ de a.

IV – Second degré

1. Racines carrées

Propriété :

> Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe deux nombres complexes r_1 et r_2 tels que $r_1^2 = r_2^2 = z$. On a de plus, $r_2 = -r_1$.

2. Second degré

Soient a, b et c trios nombres complexes, avec a ≠ 0.

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est le discriminant. Si δ est une racine carrée de Δ, les racines de l'équation ci-dessus sont :

$$\frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \frac{-b+\delta}{2a}.$$

Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ possède *toujours* deux solutions (éventuellement égales : racine double).

3. Relations entre les coefficients et les racines d'un trinôme

Propriété :

> Si z_1 et z_2 sont les racines de $az^2 + bz + c$ (distinctes ou pas), on a $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

V – Exponentielle complexe

1. Définition

Définition :

> Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On pose $e^z = e^x e^{iy}$.

2. Propriétés

Propriété :

> $\forall z \in \mathbb{R}$ et $\forall z' \in \mathbb{R}$, on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Corollaires :

> i. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $z_1, z_2, ..., z_n$ sont n nombres complexes, on a $e^{z_1+z_2+...+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} ... e^{z_n}$.
>
> ii. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{nz} = (e^z)^n$.
>
> iii. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
>
> iv. $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$, on a $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$.
>
> v. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.