Chapitre 6 : Fonctions numériques - Généralités

I – Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

1. Définitions

Définitions :

Une fonction à valeurs réelles est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $f : A \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto f(x)$.

Si f est une fonction, son ensemble de définition est l'ensemble des réels x tels que f(x) soit défini.

Définition :

On dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a avec $a \in \bar{I}$ si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert J, contenant a si $a \in \mathbb{R}$ ou de la forme $]c\,;+\infty[$ si $a = +\infty$ ou $]-\infty\,;c[$ si $a = -\infty$.

2. Représentation graphique

Définition :

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative ou représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles est l'ensemble des points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ quand x décrit I.

Propriété :

Si f est une fonction bijective de I dans $J = f(I)$, alors les représentions graphiques de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$.

Propriétés :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $a \in \mathbb{R}$.

- La courbe de $x \mapsto f(x) + a$ (définie sur I) est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- La courbe de $x \mapsto f(x+a)$ (définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus x + a \in I\}$) est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- La courbe de $x \mapsto f(a-x)$ (définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus a - x \in I\}$) est l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie d'axe vertical d'équation $x = a/2$.

Pour a non nul :

- La courbe de $x \mapsto f(ax)$ (définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus ax \in I\}$) est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation du plan qui à tout point de coordonnées (x, y) associe le point de coordonnées $(x/a, y)$.
- La courbe de $x \mapsto af(x)$ (définie sur I) est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation du plan qui à tout point de coordonnées (x, y) associe le point de coordonnées (x, ay).

3. Rappels de lycée

Voir feuille polycopiée.

Définitions :

Soit f une fonction majorée (*resp.* minorée) sur I. La borne supérieure (*resp.* inférieure) de f est la borne supérieure (*resp.* inférieure) de f(I). Elle est notée $\sup_I f$ ou $\sup_{x\in I} f(x)$ (*resp.* $\inf_I f$ ou $\inf_{x \in I} f(x)$).

4. Parité - Imparité

Définitions :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.
On dit que f est paire (*resp.* impaire) si I est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$ (*resp.* $f(-x) = -f(x)$).

Propriété :

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction paire (*resp.* impaire) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (*resp.* à l'origine du repère).

Propriété :

Toute fonction définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0 se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^I$.

- Si f et g sont paires, alors fg est paire et si $f \circ g$ est définie, elle est paire.
- Si f et g sont impaires, alors fg est paire et si $f \circ g$ est définie, elle est impaire.
- Si f est paire et g impaire (ou vice-versa), alors fg est impaire et si $f \circ g$ est définie, elle est paire.

Remarques : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors pour $a \in \mathbb{R}$ et $I' = \{x \in \mathbb{R} \setminus x + a \in I\}$:

- La droite verticale d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si :
$$\forall x \in I',\ -x \in I' \text{ et } f(-x+a) = f(x+a).$$
- Le point de coordonnées (a, b) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si :
$$\forall x \in I',\ -x \in I' \text{ et } f(-x+a) - b = -f(x+a) + b \iff f(-x+a) + f(x+a) = 2b.$$

5. Périodicité

a. Définition :

Définitions :

Soient $f \in \mathbb{R}^A$ où A est une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $x \in A \iff x + T \in A$ et $\forall x \in A$, $f(x+T) = f(x)$.
On dit alors que f est périodique de période T ou T-périodique.

Propriété :

Si f est une fonction T-périodique sur A, alors $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, f est nT-périodique sur A.

b. Périodicité et opérations :

Propriété :

Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Si f et g sont deux fonctions T-périodiques sur A, alors $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$, fg et $\dfrac{f}{g}$ (si est ne s'annule pas sur A) sont T-périodiques sur A.

Propriété :

Si f est T-périodique sur A et $g \in \mathbb{R}^B$ avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est T-périodique sur A.

6. Quelques compléments sur la dérivation

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur A. Si f' est dérivable sur A, sa dérivée, notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Remarque : On peut itérer le processus n fois pour obtenir la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, notée $f^{(n)}$.

Théorème de la bijection :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors c'est une bijection de I dans f(I) et f(I) est un intervalle.

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction dérivable et bijective sur I, telle que $\forall x \in f(I)$, $f' \circ f^{-1}(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur f(I) et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

7. Etude de fonction

Le but d'une étude de fonction est en général de réunir un maximum d'informations sur la fonction afin de construire son tableau de variations et finalement, sa courbe. Cependant, les variations de la fonctions suffisent parfois pour répondre à certaines questions : recherche d'extremum, étude du signe, comparaison de deux fonctions (qui revient à l'étude du signe de la différence), …

Dans une étude de fonction, il y a différentes étapes habituelles :

- Ensemble de définition.
- Détermination des symétries et périodicités afin de réduire le domaine d'étude.
- Construction du tableau de variations (contenant les variations et les limites de la fonction).
- Etudes des éventuelles branches infinies (asymptotes).
- Tracé de la courbe.

Bien entendu, pour étudier les variations de la fonction, on dérive quand cela est possible et on étudie le signe de la dérivée, en l'ayant préalablement factorisée au maximum.

II – Fonctions usuelles

1. Fonctions puissances

a. Définition :

Définitions :

- Soient a et b deux réels, avec a > 0. On pose $a^b = e^{b\ln a}$.
- Les fonctions puissances sont les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec α réel donné.

b. Règles de calcul :

Propriétés :

Les règles de calcul avec les puissances réelles sont les mêmes que celles des puissances entières.

Si a, a', b, b' sont quatre réels avec $a > 0$ et $a' > 0$, on a :

$$a^0 = 1 \qquad a^{b+b'} = a^b a^{b'} \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}} \qquad (a^b)^{b'} = a^{bb'} \qquad a^b a'^b = (aa')^b \qquad \frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b.$$

c. Etude des fonctions puissances :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Posons $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. On a vu que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec des prolongements dans certains cas particuliers sur α). La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables et $f'(x) = \dfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de la dérivée est celui de α. Il faut donc étudier deux cas :

- $\alpha > 0$.

La fonction f est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et (avec $X = \alpha \ln x$) :

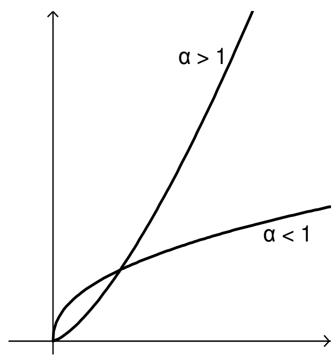
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0 \ ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty .$$

Tangente en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \lim_{x \to 0^+} e^{(\alpha - 1)\ln x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

D’où la courbe :



- $\alpha < 0$.

La fonction f est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

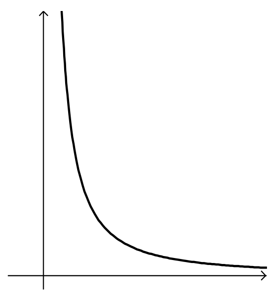
Et (avec $X = \alpha \ln x$) :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty \ ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0 .$$

Asymptote verticale en 0 et asymptote horizontale en $+\infty$.

D’où la courbe :



d. Croissances comparées :

Propriété :

Soit $\alpha \neq 0$. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}.$$

2. Fonction logarithme décimal

La fonction $x \mapsto 10^x = e^{x \ln 10}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à images dans $\mathbb{R}_+^*$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

Définition :

La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$ est appelée fonction logarithme décimal et notée $\log_{10}$ ou Log.

Propriété :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{Log}\, x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarque : Le logarithme décimal suit les mêmes règles de calcul que le logarithme népérien.

3. Cosinus et sinus hyperboliques

Définitions :

La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La fonction sinus hyperbolique, notée sh, est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Propriété :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Etude des fonctions ch *et* sh :

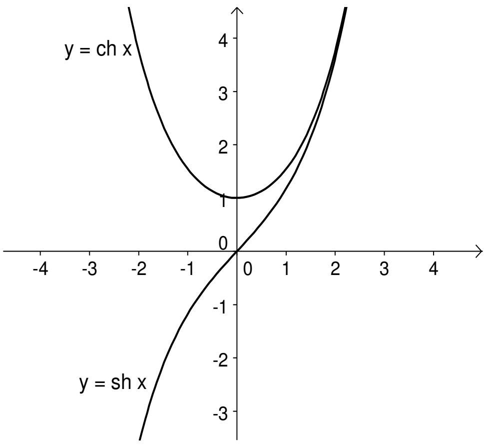
Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, ch est paire et sh est impaire. Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\text{ch}' = \text{sh} \quad \text{et} \quad \text{sh}' = \text{ch}.$$

La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

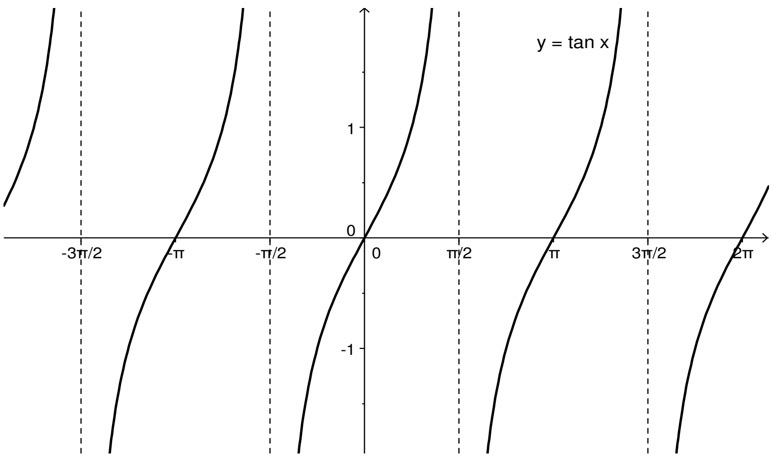
$$\lim_{x \to +\infty} \text{ch}\, x = \lim_{x \to +\infty} \text{sh}\, x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{ch}\, x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \text{sh}\, x = -\infty.$$

La courbe de ch est au-dessus de celle de sh et les courbes sont asymptotes l'une de l'autre en $+\infty$.



4. Fonction tangente

La fonction tangente, $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, π-périodique, impaire dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$. Sa courbe est :



Remarque : On définit aussi la fonction cotangente : $x \mapsto \text{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

5. Fonctions circulaires réciproques

a. Fonction arccos :

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$, à images dans $[-1\,;1]$ donc elle réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ vers $[-1\,;1]$.

Définition :

> La fonction réciproque de la fonction cosinus restreinte à $[0\,;\pi]$ est appelée fonction arccosinus et notée arccos.

Propriété :

> $\forall\, x\in\mathbb{R}$:
> - s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $2k\pi\le x\le(2k+1)\pi$, alors $\arccos\big(\cos x\big)=x-2k\pi$;
> - s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\pi<x-2k\pi<2\pi$ alors $\arccos\big(\cos x\big)=2(k+1)\pi-x$.

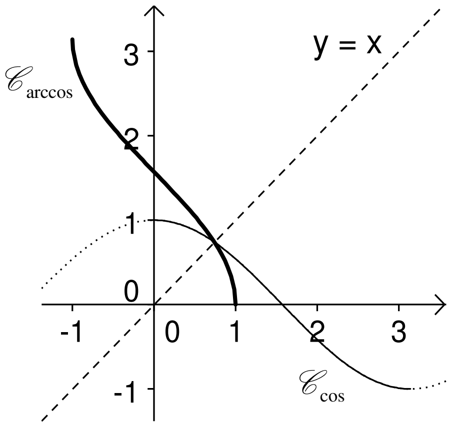
Etude de la fonction arccos :

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1\,;1]$ et à images dans $[0\,;\pi]$, dérivable sur $]-1\,;1[$ et :

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.

On obtient la courbe (symétrique de celle de cos par rapport à y = x) :



Propriété :

> $\forall\, x\in[-1\,;1]$, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

b. Fonction arcsin :

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, à images dans $[-1\,;1]$ donc elle réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1\,;1]$.

Définition :

> La fonction réciproque de la fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ est appelée fonction arcsinus et notée arcsin.

Propriété :

$\forall$ x $\in \mathbb{R}$:

- s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$, alors $\arcsin(\sin x) = x - 2k\pi$;
- s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ alors $\arcsin(\sin x) = (2k+1)\pi - x$.

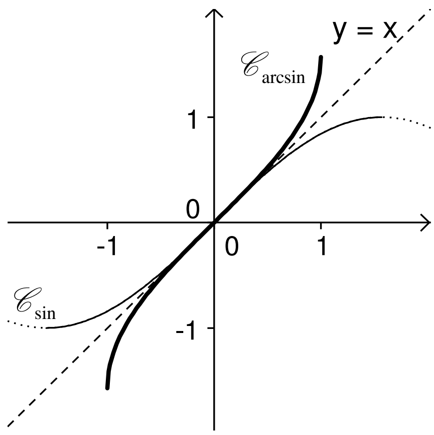
Etude de la fonction arcsin :

La fonction arcsin est définie, impaire et continue sur $[-1;1]$, à images dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et dérivable sur $]-1;1[$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1;1]$.

On obtient la courbe (symétrique de celle de sin par rapport à y = x) :



$$\boxed{\forall\, x \in [-1;1],\ \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$$

c. Fonction arctan :

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, à images dans $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

Définition :

La fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est appelée fonction arctangente et notée arctan.

Propriété :

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$ et :

$$\arctan(\tan x) = x - k\pi.$$

Etude de la fonction arctan :

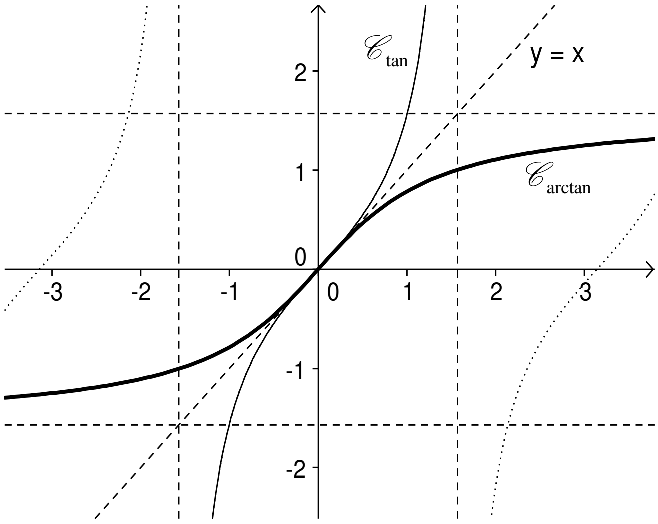
La fonction arctan est définie, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, à images dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

On obtient la courbe (symétrique de celle de de la fonction tangente par rapport à y = x) :



La courbe de arctan possède deux asymptotes horizontales : $y = -\pi/2$ en $-\infty$ et $y = \pi/2$ en $+\infty$.

III – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition :

Une fonction à valeurs complexes est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition :

Soit $f \in \mathbb{C}^I$ une fonction à valeurs complexe. On a appelle partie réelle de f, notée $\mathrm{Re}(f)$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Re}[f(x)]$, partie imaginaire de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Im}[f(x)]$, fonction conjuguée de f, notée $\overline{f}$, la fonction $x \mapsto \overline{f(x)}$ et module de f, notée $|f|$, la fonction $x \mapsto |f(x)|$.

Définition :

Soit f une fonction complexe. On dit que f est bornée si $|f|$ l'est.

Propriété :

$\forall (f,g) \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C})^2$ et $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont bornées sur I.