Chapitre 7 : Fonctions numériques - Limites et continuité

I – Limites

1. Limite finie

a. Définitions :

Définitions :

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ définie au voisinage de $a \in \bar{I}$ et un réel ℓ.

- Si a est fini, on dit que f admet ℓ pour limite au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$

- Si a est fini, on dit que f admet ℓ pour limite à droite (*resp.* à gauche) au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ a \leq x \leq a+\alpha \ (\textit{resp. } a-\alpha \leq x \leq a) \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $a = +\infty$, on dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$

- Si $a = -\infty$, on dit que f admet ℓ pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x \leq -A \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon.$$

b. Premières propriétés :

Propriété :

Si une fonction admet une limite finie en un point alors cette limite est unique.

Propriété :

Toute fonction admettant une limite finie en $a \in \bar{I}$ est bornée au voisinage de a.

Propriété :

Toute fonction admettant une limite strictement positive en $a \in \bar{I}$ est minorée, au voisinage de a, par un nombre réel strictement positif.

2. Limite infinie

Définitions :

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ définie au voisinage de $a \in \bar{I}$.

- Si a est fini, on dit que f admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour limite au point a si :

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) > A \ (\textit{resp. } f(x) < -A).$$

- Si $a = +\infty$, on dit que f admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) > A \ (\textit{resp. } f(x) < -A).$$

- Si $a = -\infty$, on dit que f admet $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) pour limite en $-\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x \leq -A \Rightarrow f(x) > A \ (\textit{resp. } f(x) < -A).$$

3. Opérations sur les limites

Dans cette partie, on prend $a \in \bar{I}$.

a. Fonctions de limite nulle :

Propriétés :

- $f(x) \to 0 \Leftrightarrow |f|(x) \to 0$.
- L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^I$ de limite nulle en a est stable par combinaisons linéaires.

Propriété :

Le produit d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction de limite nulle en a est de limite nulle en a.

b. Fonctions de limite finie quelconque :

Tous les résultats donnés dans cette partie, s'adaptent sans peine aux limites à droite et à gauche.

Propriété :

Si $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$ alors $|f(x)| \to |\ell|$ que $x \to a$.

Propriété :

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^I$ telles que $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$ avec ℓ et ℓ' finies.

- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_a (\lambda f + \mu g) = \lambda\ell + \mu\ell'$
- $\lim\limits_a fg = \ell\ell'$.
- Si f ne s'annule pas au voisinage de a et $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$ et $\lim\limits_a \frac{g}{f} = \frac{\ell'}{\ell}$.

Propriété :

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ telle que $\lim\limits_a f = b \in \bar{J}$ et g est définie sur J tel que $f(I) \subset J$ telle que $\lim\limits_b g = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, $\lim\limits_a g \circ f = \ell$.

c. Fonctions de limite infinie :

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

- Si $\lim\limits_a f = \pm\infty$, alors $\lim\limits_a |f| = +\infty$.
- Si $\lim\limits_a f = +\infty$ (*resp.* $-\infty$) et g bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_a (f+g) = +\infty$ (*resp.* $-\infty$).
- Si $\lim\limits_a f = \pm\infty$, g de signe constant et $|g|$ est bornée par deux réels strictement positifs au voisinage de a, alors $\lim\limits_a fg = \pm\infty$ (suivant les signes de f et g : voir le tableau).
- Si $\lim\limits_a f = b \in \overline{\mathbb{R}}$ et g est définie sur J tel que $f(I) \subset J$ telle que $\lim\limits_b g = +\infty$ (*resp.* $-\infty$), alors $\lim\limits_a g \circ f = +\infty$ (*resp.* $-\infty$).
- Pour les autres opérations, voir le tableau.

Propriété :

Si $\lim\limits_a f = \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes dans I de limite a, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

4. Limites et ordre

Propriété :

Si $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_a g = \ell' \in \mathbb{R}$ avec $f \leq g$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \ell'$.

Propriété :

Si $|f| \leq g$ au voisinage de a et $\lim_a g = 0$, alors $\lim_a f = 0$.

Corollaire : *Théorème des gendarmes.*

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim_a h = \lim_a g = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_a f = \ell$.

Propriété :

Si $g \leq f$ au voisinage de a et $\lim_a g = +\infty$, alors $\lim_a f = +\infty$.

5. Limites et monotonie

Théorème :

Soit f croissante sur I.

- Si $a \neq -\infty$ et f est définie et majorée au voisinage de a^-, alors $\lim_{a^-} f = \sup\{f(x), x \in I \cap]-\infty; a[\} \in \mathbb{R}$.
- Si $a \neq -\infty$ et f définie et non majorée au voisinage de a^-, alors $\lim_{a^-} f = +\infty$.
- Si $a \neq +\infty$ et f est définie et minorée au voisinage de a^+, alors $\lim_{a^+} f = \inf\{f(x), x \in I \cap]a; +\infty[\} \in \mathbb{R}$.
- Si $a \neq +\infty$ et f définie et non minorée au voisinage de a^+, alors $\lim_{a^+} f = -\infty$.

6. Limites et représentation graphique

Petit rappels :

- Si $\lim_{+\infty} f = \ell$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $y = \ell$ pour asymptote horizontale en + ∞. Idem en – ∞.
- Si a est finie et $\lim_a f = \pm\infty$ ou $\lim_{a^+} f = \pm\infty$ ou $\lim_{a^-} f = \pm\infty$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $x = a$ pour asymptote verticale.
- Si il existe deux réels finis a et b tels que $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique en + ∞. Idem en – ∞.

  Pour déterminer une éventuelle asymptote oblique en + ∞, la méthode est la suivante :
  - Evaluer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
  - Si cette limite vaut a fini, alors évaluer $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$.
  - Si cette limite vaut b fini, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en + ∞.

II – Continuité

Dans ce qui suit, on considère une fonction $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$.

1. Définition

Définitions :

- On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue à droite (*resp.* à gauche) en a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (*resp.* $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$).
- On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

2. Continuité et opérations

Propriétés :

- $\mathcal{C}_a(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ sont stables par combinaisons linéaires et produit.
- Si f est continue en a (*resp.* sur I), $|f|$ l'est aussi.
- Quand il est défini, le quotient de 2 fonctions continues en a (*resp.* sur I) est continu en a (*resp.* sur I).
- Quand elle est définie, la composée de deux fonctions continues est continue.

3. Restriction et prolongement

Propriétés :

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et J un intervalle inclus dans I. La restriction de f à J est continue sur J.

Définitions :

Soit $b \in \bar{I} \setminus I$ fini. Si f admet une limite finie en b, on dit que f se prolonge par continuité en b.

Dans ce cas, on appelle prolongement par continuité de f la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f} : I \cup \{b\} \to \mathbb{R} \,;\, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = b \end{cases}$$

où $\lim_b f = \ell$.

4. Image continue d'un intervalle – Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire : *Théorème des valeurs intermédiaires.*

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $[a\,;b] \subset I$.

Tout réel compris entre f(a) et f(b) admet au moins un antécédent dans $[a\,;b]$ par f.

5. Image continue d'un segment

Théorème :

Si $f \in \mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{R})$, alors $f\big([a\,;b]\big)$ est un segment. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, ou encore, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

6. Bijection continue

Propriété :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ strictement monotone sur I et telle que $f(I)$ est un intervalle. Alors, f est une bijection continue de I dans $f(I)$.

Théorème : *de la bijection continue.*

Si $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ est strictement monotone sur I, alors elle est bijective de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque est continue sur J, strictement monotone et de même sens de variation que f.

III – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce qui suit, on considère une fonction $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in \bar{I}$.

Définitions :

Soit un nombre complexe ℓ.

Si a est fini, on dit que f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x > A \ (\textit{resp. } x < -A) \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Si $a \in I$, on dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Propriété :

Si f admet une limite finie en a alors :

- cette limite est unique et on la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.
- f est bornée au voisinage de a.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$.

Propriété :

- $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{a} \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell)$.
- $\lim\limits_{a} f = \ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\lim\limits_{a} \bar{f} = \bar{\ell}$.

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{a} f = \ell$ et $\lim\limits_{a} g = \ell'$.

- $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lim\limits_{a} (\lambda f + \mu g) = \lambda\ell + \mu\ell'$.
- $\lim\limits_{a} fg = \ell\ell'$.
- Si $\ell' \neq 0$ alors g ne s'annule pas au voisinage de a et $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell}{\ell'}$ (en particulier, $\lim\limits_{a} \dfrac{1}{g} = \dfrac{1}{\ell'}$).
- Si $h \in \mathbb{R}^J$ avec $h(J) \subset I$, $a \in \bar{J}$, $\lim\limits_{a} h = b$ avec $b \in \overline{h(J)}$ et $\lim\limits_{b} f = \ell$, alors $\lim\limits_{a} f \circ h = \ell$.