Chapitre 8 : Fonctions numériques - Dérivation

I – Dérivée d'une fonction

Dans cette partie, on considère (sauf mention contraire) une fonction f définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et un réel $a \in I$. La plupart des définitions et résultats s'étendent aux fonctions définies sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

1. <u>Dérivée en un point</u>

a. <u>Définition</u> :

<u>Définitions</u> :

La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelée <u>taux d'accroissement ou de variation de f entre a et x</u>.
On dit que la fonction f est <u>dérivable (*resp*. dérivable à droite, *resp*. dérivable à gauche) en a</u> si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie (*resp*. une limite finie à droite, *resp*. une limite finie à gauche) en a.
Cette limite est appelée <u>nombre dérivée de f en a</u> (*resp*. <u>nombre dérivée à droite</u>, *resp*. <u>nombre dérivée à gauche</u>), notée $f'(a)$ (*resp*. $f_d'(a)$, *resp*. $f_g'(a)$).

<u>Propriété</u> :

Si f est une fonction dérivable en a, alors elle est continue en a.

b. <u>Interprétation graphique</u> :

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et $A(a,f(a))$ un point de $\mathscr{C}$.

- Si f est dérivable en a, alors $\mathscr{C}$ admet une tangente en A de pente $f'(a)$. Cette tangente passe par A et son équation réduite est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
- Si f est dérivable à droite (*resp*. à gauche) en a, alors $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente en A de pente $f_d'(a)$, (*resp*. $f_g'(a)$).
- Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, donc $\mathscr{C}$ admet une tangente verticale en A. De même, pour les demi-tangentes à droite et à gauche.

c. <u>Interprétation cinématique</u> :

Si la variable est le temps t et la fonction f représente la distance parcourue par un mobile M se déplaçant sur une droite, alors :

- Le taux de variation $\dfrac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o}$ représente lui la vitesse moyenne entre les instants t et t_o.
- $f'(t_o)$ représente la vitesse instantanée de M à l'instant t_o.

2. <u>Fonction dérivée</u>

<u>Définitions</u> :

Si f admet un nombre dérivé en tout point de I, alors on dit que f est <u>dérivable sur I</u> et la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée <u>fonction dérivée (ou dérivée)</u> de f sur I. On la note f', Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

3. Opérations sur les dérivées

Propriété :

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, alors $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g' \text{ et } (fg)'=f'g+fg'.$$

Propriété :

Soient f et g deux fonctions telles que f est dérivable sur I et g est définie et dérivable sur f(I). Alors, $g\circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g\circ f)'=f'\times g'\circ f.$$

Propriété :

Soit $(f,g)\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R})^2$ tel que g ne s'annule pas sur I, alors, $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Propriété :

Soit f une fonction bijective de I dans J et dérivable sur I. Alors, f^{-1} est dérivable en tout point a de J tel que $f'\left(f^{-1}(a)\right)\neq 0$ et $(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}$.

4. Extremum locaux et dérivées

Propriété :

Soit f une fonction définie sur I et a un point intérieur à I.
Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$.

5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

a. Définition :

Définitions :

Soit n un entier naturel. Si on note $f^{(0)}=f$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ dérivable sur I et sa dérivée $n-1^{\text{ième}}$ est dérivable sur I. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de f est notée $f^{(n)}$, $D^n f$, $\frac{d^n f}{dx^n}$.

On dit que f est indéfiniment dérivable sur I, si elle est n fois dérivable sur I pour tout entier naturel n.

Pour $0\leq n\leq\infty$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

Notation : On note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^n(I)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

b. Opérations :

Propriétés :

$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors :

- $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda f+\mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(\lambda f+\mu g)^{(n)}=\lambda f^{(n)}+\mu g^{(n)}$.
- fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$ (formule de Leibniz).
- Si g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur f(I), alors $g\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Si f est bijective de I dans f(I) et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur f(I).

II – Etude globale des fonctions dérivables

1. Théorème de Rolle

Théorème : *de Rolle*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$.

Il existe $c\in\,]a,b[$, tel que $f'(c)=0$.

2. Egalité et inégalité des accroissements finis

a. Egalité des accroissements finis :

Théorème : *des accroissements finis (TAF)*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Il existe $c\in\,]a,b[$, tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

b. Inégalité des accroissements finis :

Corollaire : *Inégalité des accroissements finis*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $m\le f'\le M$. Alors :

$$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a).$$

3. Fonctions lipschitziennes

Définition :

Soient $f\in\mathbb{R}^I$. On dit que f est lipschitzienne si $\exists\, k\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall\,(x,y)\in I^2$, $|f(x)-f(y)|\le k\,|x-y|$.

On dit alors que f est k-lipschitzienne.

Propriété :

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $|f'|\le k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

4. Dérivation et sens de variation

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I.

- f est constante sur I ssi f' est nulle sur l'intérieur de I.
- f est croissante (*resp*. décroissante) sur I ssi f' est positive ou nulle (*resp*. négative ou nulle) sur l'intérieur de I. De plus, si la dérivée s'annule sur une partie de I en bijection avec $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$, la monotonie est stricte.

Corollaire :

Soit f une fonction dérivable sur I et a un point intérieur à I.

Si f' s'annule et change de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

5. Lien entre f '(a) et la limite de f '(x) en a

Propriété :

Si f est continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$.

- si f' admet en a une limite finie ℓ, alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$ avec $f'(a)=\ell$.
- si f' admet en a une limite infinie, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ aussi et f n'est pas dérivable en a.

III – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Sur $\mathbb{C}^I$, les notions de taux de variation et de limite ont du sens. Donc, on peut définir nombre dérivé et fonction dérivée.

Propriété :

> Soient $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in I$.
>
> f dérivable en a (*resp*. sur I) $\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ dérivable en a (*resp*. sur I) $\Leftrightarrow$ Re(f) et Im(f) dérivables en a (*resp*. sur I).
>
> Et dans ce cas, $\overline{f}\,' = \overline{f\,'}$, $\mathrm{Re}(f\,') = [\mathrm{Re}(f)]'$ et $\mathrm{Im}(f\,') = [\mathrm{Im}(f)]'$.

Les propriétés associées à la dérivation qui ne mettent pas en jeu des inégalités s'étendent aux fonctions à valeurs complexes. En particulier, la propriété « dérivable implique continue » et la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée nulle sont valables dans $\mathbb{C}$ (se prouve avec les parties réelles et imaginaires).

Par contre toutes celles qui parlent de variations, d'extremums, de comparaison,… n'ont bien sûr pas de sens sur $\mathbb{C}$.

Attention : Le théorème de Rolle et le TAF ne sont plus vrais sur $\mathbb{C}$.

Propriété :

> Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $|f\,'| \leq M$. Alors :
>
> $$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq M.$$

La stabilité de la dérivabilité par opérations est toujours valable ainsi que les formules associées (attention pour la composition : on peut définir la composée d'une fonction à valeurs *réelles* par une fonction à valeurs complexes).