Chapitre 9 : Fonctions numériques - Primitives

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les propriétés de bases des intégrales de fonctions continues (linéarité, relation de Chasles, croissance) sont supposées connues (vues en Terminale) et seront reprises en fin d'années.

I – Primitives d'une fonction continue

1. Définition

Définitions :

Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Propriété :

Deux primitives sur un intervalle d'une même fonction continue diffèrent d'une constante.

2. Primitives et intégrale

Théorème :

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $a \in I$.

- La fonction f admet des primitives sur I.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, définie sur I, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Corollaires :

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $a \in I$.

- Pour toute primitive F de f sur I, on a $\forall\, x \in I,\ F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\forall\, x \in I$, on a $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

Propriété :

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et h et g deux fonctions dérivables sur un intervalle J et à valeurs dans I.
Alors, la fonction $x \mapsto \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J, de dérivée $x \mapsto h'(x)f\big(h(x)\big) - g'(x)f\big(g(x)\big)$.

II – Calcul de primitives et d'intégrales

1. Intégration par parties

Propriété :

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, $\forall\,(a,b) \in I^2$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

2. Changement de variable

Propriété :

Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et à valeurs dans I, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)f\big(\varphi(u)\big)du.$$

Quelques changements de variable usuels :

1) <u>Changement affine</u> : $t = \varphi(u) = au + b$. On a $dt = a du$ donc $u = \frac{t-b}{a}$ et $du = \frac{1}{a}dt$.

2) <u>Exponentiel</u> : Si $f(t) = e^t g(e^t)$, on peut poser $u = e^t$. On a $du = e^t dt$ et :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^t g(e^t)dt = \int_{e^a}^{e^b} g(u)du .$$

3) <u>Trigonométrique</u> : Si $f(t) = g(\cos t, \sin t)$, on peut poser $u = \cos t$, $u = \sin t$, $u = \tan t$ ou $u = \tan\frac{t}{2}$.
   - Pour les deux premiers, il faut penser que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, pour éventuellement remplacer des $\cos t$ par des $\sin t$, ou vice-versa.
   - Pour les deux derniers, il faut faire très attention à l'intervalle d'intégration car la fonction tangente n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
   - Le dernier est plus laborieux à mettre en œuvre, mais marche très souvent. Si $u = \tan\frac{t}{2}$, on a :
     - $dt = \frac{2du}{1+u^2}$.
     - $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.
     - $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$.

4) Quand apparait dans la fonction la quantité $\sqrt{1-t^2}$, penser aux fonctions trigonométriques.

3. <u>Cas de fonctions rationnelles simples</u>

Une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes.

Primitives de fonctions du type $t \mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$ *avec* $a \neq 0$:

- Si at^2+bt+c possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($b^2-4ac>0$), on peut écrire :

  $$\frac{1}{at^2+bt+c} = \frac{\alpha}{t-r_1} + \frac{\beta}{t-r_2}$$

  où a et b sont des réels (que l'on peut obtenir par identification).

  Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$ est alors $t \mapsto \alpha \ln|t-r_1| + \beta \ln|t-r_2|$ sur un intervalle ne contenant pas les racines r_1 et r_2.

- Si at^2+bt+c possède une racine réelle double r ($b^2-4ac=0$), on peut écrire :

  $$\frac{1}{at^2+bt+c} = \frac{1}{a(t-r)^2} .$$

  Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{at^2+bt+c}$ est alors $t \mapsto -\frac{1}{a(t-r)}$ sur un intervalle ne contenant pas r.

- Si at^2+bt+c ne possède pas de racine réelle ($b^2-4ac<0$), on peut écrire :

$$\frac{1}{at^2+bt+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\frac{\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}}{\left(\frac{2at+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)^2+1}.$$

Une primitive de $t\mapsto\frac{1}{at^2+bt+c}$ est alors $t\mapsto\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2at+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)$.

Primitives de fonctions du type $t\mapsto\frac{\alpha t+\beta}{at^2+bt+c}$ *avec* $a\neq 0$:

$$\frac{\alpha t+\beta}{at^2+bt+c}=\frac{\alpha}{2a}\frac{2at+b}{at^2+bt+c}+\frac{2a\beta-\alpha b}{2a}\frac{1}{at^2+bt+c}.$$

On a alors une combinaison linéaire de deux fonctions que l'on sait intégrer.

Primitives de fonctions du type $t\mapsto\frac{P(t)}{at^2+bt+c}$ *avec* $a\neq 0$ *et* P *fonction polynôme* :

Les fonctions du type $t\mapsto\frac{P(t)}{at^2+bt+c}$ où P est une fonction polynôme quelconque peut d'écrire sous la forme $t\mapsto Q(t)+\frac{\alpha t+\beta}{at^2+bt+c}$ où Q est une fonction polynôme. On peut donc intégrer ce type de fonctions.