

## Résumé du chapitre 10 : Intégration sur un intervalle

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I - Fonctions continues par morceaux

#### I-1. Définitions

Rappels :

- Une subdivision d'un segment  $[a, b]$  est une famille  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  telle que  $a_0 = a$ ,  $a_n = b$  et pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $a_k < a_{k+1}$ .
- Une subdivision  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  d'un segment  $[a, b]$  est régulière si pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $a_{k+1} - a_k$  ne dépend pas de  $k$  et vaut alors  $\frac{b-a}{n}$ . Dans ce cas, on a pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ .

Définitions :

Une fonction  $f$  définie sur un segment  $[a, b]$  est dite continue par morceaux (cpm) sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $f$  est continue sur  $]a_k, a_{k+1}[$  et admet une limite finie en  $a_k^+$  et en  $a_{k+1}^-$ . La subdivision  $\sigma$  est dite adaptée à  $f$ .

Une fonction  $f$  est continue par morceaux sur un intervalle  $I$  si elle l'est sur tout segment inclus dans  $I$ .

*Notation* : On note  $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Propriété : (non mentionnées dans le programme)

- $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$  (fonctions bornées sur  $I$ ), stable par produit.
- $\mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^I$ , stable par produit.

#### I-2. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition :

Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$  et  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $f$ .

L'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ , notée  $\int_{[a, b]} f$  ou  $\int_a^b f$  ou  $\int_a^b f(t)dt$ , est  $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{[a_k, a_{k+1}]} \tilde{f}_k$  avec :

$$\tilde{f}_k : x \mapsto \begin{cases} \lim_{a_k} f & \text{en } a_k \\ f(x) & \text{sur } ]a_k, a_{k+1}[ \\ \lim_{a_{k+1}} f & \text{en } a_{k+1} \end{cases}$$

Propriétés :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$ .

- *Linéarité de l'intégrale* : Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$ .
- *Positivité* : Si  $f$  est réelle et positive sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f \geq 0$ .
- *Croissance de l'intégrale* : Si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$ .
- *Inégalité de la valeur absolue ou du module* :  $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$ .
- *Inégalités de la moyenne* :  $\left| \int_{[a,b]} f g \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$ .

Si  $m$  est un minorant et  $M$  est un majorant de  $f$  sur  $[a, b]$  ( $f$  à valeurs réelles), alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq M .$$

- *Relation de Chasles* : Pour tout  $c \in [a, b]$ ,  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ .
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* :  $\left( \int_{[a,b]} f \times g \right)^2 \leq \left( \int_{[a,b]} f^2 \right) \times \left( \int_{[a,b]} g^2 \right)$ .
- *Changement de variable* : Si  $\varphi$  est une bijection de classe  $C^1$  de  $I$  dans  $J$  avec  $[a, b] \subset J$ , alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \varphi'(u) f(\varphi(u)) du .$$

**II - Intégrales généralisées ou impropres****II-1. Intégrales généralisées sur  $[a, +\infty[$** 

Dans cette partie,  $a$  est un réel fixé.

Définitions :

Si  $f$  est une application à valeurs complexes, continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$ .

L'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge ou est convergente si la primitive  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  admet une limite finie

lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Si tel est le cas, on note  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  cette limite.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge ou est divergente.

Propriété :

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, +\infty[$  et à valeurs positives, alors  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est majorée.

**II-2. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque**

Soient  $I = ]a, b[$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  avec  $] = ]$  ou  $[$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $a \leq b$ , et  $f$  une fonction à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur  $I$ .

Définitions :

L'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est dite impropre en  $a$  (resp. en  $b$ ) si  $a \notin I$  (resp.  $b \notin I$ ).

On dit qu'elle converge ou est convergente si, pour tout  $c \in I$ , les fonctions  $x \mapsto \int_x^c f(t)dt$  et  $y \mapsto \int_c^y f(t)dt$  admettent une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$  et  $y$  tend vers  $b$ .

Dans ce cas, on note  $\int_a^b f(t)dt$ , ou  $\int_a^b f$ , ou encore  $\int_I f$ , la limite de  $\int_x^y f(t)dt$  quand  $x \rightarrow a$  et  $y \rightarrow b$ .

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge ou est divergente.

*Notation :* Par convention,  $[f]_a^b = \lim_b f - \lim_a f$  et on utilise cette notation quand les deux limites sont finies.

Propriété : (non mentionnée dans le programme)

Si  $a$  et  $b$  sont finis et  $f$  est continue par morceaux sur  $I = ]a, b[$  (resp.  $I = [a, b[$ , resp.  $I = ]a, b[$ ) et admet une limite finie en  $a$  (resp. en  $b$ , resp. en  $a$  et  $b$ ), alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge.

**II-3. Intégrales de référence**Propriété et définition :

Les intégrales  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  sont appelées intégrales de Riemann.

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ , impropre en 0, converge si et seulement si  $\alpha < 1$  et vaut  $\frac{1}{1-\alpha}$  dans ce cas.

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ , impropre en  $+\infty$ , converge si et seulement si  $\alpha > 1$  et vaut  $\frac{1}{\alpha-1}$  dans ce cas.

L'intégrale  $\int_0^1 \ln t dt$ , impropre en 0, converge avec  $\int_0^1 \ln t dt = -1$ .

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ , impropre en  $+\infty$ , converge si et seulement si  $\alpha > 0$  et vaut  $\frac{1}{\alpha}$  dans ce cas.

**II-4. Propriétés des intégrales généralisées**a. Propriétés usuelles :Propriétés :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $I = ]a, b[$  (comme défini plus haut) telles que les intégrales  $\int_a^b f(t)dt$  et  $\int_a^b g(t)dt$  convergent.

• *Linéarité de l'intégrale :* Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,  $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$  converge et  $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ .

• *Positivité :* Si  $f$  est réelle et positive sur  $I$ , alors  $\int_a^b f \geq 0$ .

De plus, si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $\int_I f = 0$  si et seulement si  $f$  est nulle sur  $I$ .

• *Croissance de l'intégrale :* Si  $f \leq g$  sur  $I$ , alors  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

- *Relation de Chasles* : Pour tout  $c \in I$ ,  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ .
- *Inégalité de Cauchy-Schwarz* : Si  $\int_a^b f^2$  et  $\int_a^b g^2$  convergent, alors  $\int_a^b fg$  converge et :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right) \times \left(\int_a^b g^2\right).$$

### b. Changement de variable :

#### Propriété :

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , continue par morceaux sur  $I$  et  $\varphi$  une bijection strictement monotone de classe  $C^1$  d'un intervalle  $J = ]\alpha, \beta[$  dans  $I$ .

L'intégrale  $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$  converge si et seulement si  $\int_a^b f(t)dt$  est convergente et, dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

### c. Intégration par parties :

#### Propriété :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $I$ .

Si  $\int_a^b f(t)g'(t)dt$  et  $\int_a^b f'(t)g(t)dt$  convergent, alors  $[f(t)g(t)]_a^b$  existe et :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

## III - Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

### III-1. Généralités

#### Définitions :

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ .

On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est absolument convergente si l'intégrale  $\int_a^b |f(t)|dt$  converge.

Dans ce cas, on dit que la fonction  $f$  est intégrable sur  $I$ .

On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est semi-convergente si elle converge sans que  $\int_a^b |f(t)|dt$  converge.

### III-2. Propriétés de comparaison

#### Propriété :

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I$ .

Si l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Propriété :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a, b[$  avec  $b \in \mathbb{R}$  ou  $b = +\infty$ .

- Si  $|f| \leq |g|$ , alors si  $g$  est intégrable sur  $[a, b[$ ,  $f$  l'est aussi avec  $\int_a^b |f| \leq \int_a^b |g|$  et si  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, b[$ ,  $g$  ne l'est pas non plus.
- Si  $f = O_b(g)$ , on a les mêmes résultats que ci-dessus.
- Si  $f \sim_b g$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  si et seulement si  $g$  l'est.

**III-3. Espaces de fonctions intégrables**Propriétés :

Muni des lois usuelles, l'ensemble  $E_1$  des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , continues par morceaux et intégrables sur  $I$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'application  $f \mapsto \int_a^b |f|$  est une norme sur  $E_1 \cap C(I, \mathbb{K})$ .

Définition et propriété :

On dit qu'une fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$  est de carré intégrable si  $\int_I f^2$  converge.

Muni des lois usuelles, l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux et de carré intégrable sur  $I$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Propriétés :

- Le produit de deux fonctions à valeurs réelles, continues par morceaux et de carré intégrable sur  $I$  est intégrable.
- L'application  $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$  est un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de  $C(I, \mathbb{R})$  de carré intégrable sur  $I$ .