

Résumé du chapitre 12 : Espaces probabilisés

I - Ensembles dénombrables

Définition :

Un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec \mathbb{N} .

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est dénombrable si l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$ est dénombrable.

Propriété :

Un ensemble dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Propriétés : (non mentionnées dans le programme)

- Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.
- Si un ensemble peut être mis en bijection avec un ensemble dénombrable, alors il est dénombrable.
- La réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Propriété :

Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

II - Espace probabilisé

II-1. Tribu et univers

Définitions :

Soit Ω un ensemble.

On appelle tribu sur Ω une partie \mathcal{A} de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

- i. $\Omega \in \mathcal{A}$;
- ii. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;
- iii. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} , la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ appartient à \mathcal{A} .

L'ensemble Ω est appelé univers.

Les éléments de \mathcal{A} sont appelés événements.

Un système complet dénombrable d'événements est une famille dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements non vides, incompatibles deux à deux et telle que $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Propriétés : (non mentionnées dans le programme)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On a :

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i.$$

Propriétés :

Soit \mathcal{A} une tribu sur un ensemble Ω .

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- Toute réunion ou intersection finie d'éléments de \mathcal{A} appartient à \mathcal{A} .
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} , $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, autrement dit, toute intersection dénombrable d'éléments de \mathcal{A} appartient à \mathcal{A} .

<i>Langage probabiliste</i>	<i>langage ensembliste</i>
univers	ensemble
tribu	ensemble de parties (vérifiant certaines propriétés)
issue	élément
évènement	partie ou sous-ensemble
évènement élémentaire	singleton
évènement impossible	\emptyset
évènement certain	ensemble entier
évènement contraire	complémentaire
évènements incompatibles	parties disjointes
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
système complet d'évènements	partition

II-2. Loi de probabilitéDéfinitions :

Si Ω est un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur Ω , on appelle loi de probabilité ou probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) , une application $P: \mathcal{A} \rightarrow [0;1]$ telle que :

i. $P(\Omega) = 1$.

ii. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$.

On appelle espace probabilisé un triplet (Ω, \mathcal{A}, P) où \mathcal{A} est une tribu et P une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) .

Un évènement quasi-certain est un évènement de probabilité 1.

Un évènement quasi-impossible est un évènement de probabilité 0.

Dans toute la suite, on se place dans espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Propriétés : (non mentionnées dans le programme de 2^{ème} année, mais mentionnées dans celui de 1^{ère} année)

Soit A et B deux évènements de Ω . On a :

- Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Propriétés :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de Ω .

- *Continuité croissante* : Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

- *Continuité décroissante* : Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

Corollaires :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de Ω . On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

Propriété : Sous-additivité

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de Ω telle que $\sum P(A_n)$ converge. On a :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

III - Conditionnement et indépendance**III-1. Probabilité conditionnelle**

a. Définition :

Définition :

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriété et définition :

L'application P_B est une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) appelée probabilité conditionnée à B .

Propriété : Formule des probabilités composées

Soit (A_1, A_2, \dots, A_m) une famille d'événements. On a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-2}}(A_{m-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m).$$

b. Formule des probabilités totales :Définition :

Une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements est un système complet dénombrable d'évènements si les A_n sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω .

Propriété : Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évènements. La série $\sum P(A_n \cap B)$ converge et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Corollaires : Formules de Bayes

- Si A et B sont deux évènements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements et si B est un évènement tel que $P(B) > 0$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$P_B(A_N) = \frac{P(A_N)P_{A_N}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)}.$$

III-2. Indépendancea. Couple d'évènements indépendants :Définition :

Deux évènements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété :

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.

Propriété : (non mentionnée dans le programme)

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si A et \bar{B} le sont.

b. Famille finie d'évènements mutuellement indépendants :Définitions :

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements. On dit que A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants si pour tout $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et tout $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p$ tel que $i_1 < i_2 < \dots < i_p$:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_p}).$$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements. On dit que les A_i sont mutuellement indépendants si les éléments de toute sous-famille finie de $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants.