# *Résumé du chapitre 13 : Variables aléatoires discrètes*

*Dans tout le chapitre, $\Omega$ est un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$.*

## I - Variables aléatoires discrètes

### I-1. Généralités

*Définition* :

Une variable aléatoire discrète $X$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur $\Omega$ dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.

Lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (var).

*Propriété* :

Soit $X$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement, c'est-à-dire $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

*Notations* : L' évènement $X^{-1}(U)$ est noté $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$.

### I-2. Loi d'une variable aléatoire discrète

*Dans toute la suite, on se place dans espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X est une variable aléatoire discrète.*

a. Définition :

*Propriété et définition* :

L'application $P_X : \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0;1]; A \mapsto P(X \in A)$ est une loi de probabilité sur $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$, appelée loi de la variable aléatoire $X$.

*Propriété* :

Si $X$ prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, les $x_n$ étant distincts deux à deux, et si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité $P$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$.

b. Fonction de répartition :

*Définition* :

Si $X$ est à valeurs réelles, la fonction de répartition de $X$ est la fonction $F_X : x \mapsto P(X \le x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

*Propriétés* :

- La fonction $F_X$ est croissante.
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

# II - Couple de variables aléatoires discrètes

## II-1. Loi conjointe et lois marginales

*Définitions* :

L'application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui, à tout $(x,y)$ de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, associe $P\big(X=x,Y=y\big)$ est appelée loi conjointe du couple $(X,Y)$.

Les lois marginales de $(X,Y)$ sont les lois de $X$ et de $Y$.

*Propriétés* : (***non mentionnées dans le programme de 2ème année, mais mentionnées dans celui de 1ère année***)

Pour tout $(A,B)\in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)\times\mathscr{P}\big(Y(\Omega)\big)$, on a :

$$P\big(X\in A,Y\in B\big)=\sum_{(a,b)\in A\times B} P\big(X=a,Y=b\big).$$

Soient $A$ et $A'$ sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$. On a :

$$P\big(X\in A\cup A',Y\in B\big)=P\big(X\in A,Y\in B\big)+P\big(X\in A',Y\in B\big).$$

## II-2. Indépendance

a. Loi conditionnelle :

*Définition* :

Soit $y\in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$. L'application :

$$P_{(Y=y)} : X(\Omega)\to[0;1]\ ;\ x\mapsto P_{(Y=y)}(X=x)$$

est appelée loi conditionnelle de $X$ sachant $(Y=y)$.

b. Indépendance d'un couple de variables aléatoires :

*Définition* :

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ :

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)\times P(Y=y).$$

*Propriété* :

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors, pour toute partie $A\subset X(\Omega)$ et toute partie $B\subset Y(\Omega)$, on a :

$$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)\times P(Y\in B).$$

Autrement dit, les évènements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.

*Propriété* :

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions $f$ et $g$, définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

c. Mutuelle indépendance :

*Définition* :

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur Ω. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes ou mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1(\Omega)\times\ldots\times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1)$, … , $(X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur Ω, les variables aléatoires $X_n$ sont mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $A \subset \mathbb{N}$, la famille finie $(X_n)_{n\in A}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

*Propriété* : (***non mentionnée dans le programme de 2ème année, mais mentionnée dans celui de 1ère année***)

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_1,\ldots,A_n) \in \mathscr{P}\left(X_1(\Omega)\right)\times\ldots\times\mathscr{P}\left(X_n(\Omega)\right)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

## III - Lois usuelles

***Résultats de première année***

**III-1. Lois usuelles sur un univers fini**

a. Loi uniforme :

Si *X* est une variable aléatoire sur Ω, la loi $P_X$ peut être uniforme quand $X(\Omega)$ est fini : toutes les valeurs de $X(\Omega)$ ont la même probabilité, égale à $\dfrac{1}{\mathrm{Card}\left(X(\Omega)\right)}$.

b. Loi de Bernoulli :

*Définitions* :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles (notées en général succès et échec).

Une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire *X* telle que $X(\Omega) = \{0,1\}$.

Une loi de Bernoulli est la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli ou à variable aléatoire de Bernoulli.

Si $p \in [0;1]$ est la probabilité de « succès » ou de $(X = 1)$, *p* est appelé paramètre de la loi, qui est alors notée $\mathscr{B}(p)$. Pour une variable aléatoire de Bernoulli, *X*, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

c. Loi binomiale :

*Définitions* :

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire consistant à répéter une épreuve de Bernoulli plusieurs fois de suite et de manière indépendante.

Une loi binomiale est la loi suivie par la variable aléatoire donnant le nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. Si l'épreuve de Bernoulli est répétée *n* fois et *p* est le paramètre associé à l'épreuve, la loi binomiale est notée $\mathscr{B}(n, p)$ et *n* et *p* sont les paramètres de cette loi.

*Notation* : Si une variable aléatoire *X* suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p*, on note : $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

*Propriété* :

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

*Propriété* :

Si $X_1,\dots,X_n$ sont $n$ variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et toutes de même paramètre $p$, alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

### III-2. Loi géométrique

*Définition* :

Si on répète indéfiniment et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$, alors le rang d'apparition du premier succès suit une loi géométrique de paramètre $p$.

*Notation* : Si une variable aléatoire $X$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, on note : $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

*Propriété* :

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$.

On a $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p.$$

*Propriété* :

Une loi géométrique est une loi *sans mémoire* : si une variable aléatoire $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$, alors pour tous $k,n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{(X>n)}(X>n+k)=P(X>k).$$

Réciproquement, toute loi vérifiant la propriété ci-dessus est une loi géométrique.

### III-3. Loi de Poisson

*Définition* :

Une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si $X(\Omega)=\mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$P(X=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

*Notation* : Si une variable aléatoire $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$, on note : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

*Propriété* :

Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$. La variable $X_1+X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

### III-4. Un résultat asymptotique

*Propriété* : *Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson*

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires sur $\Omega$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} n p_n = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

## IV - Série génératrice

### IV-1. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

*Définition* :

Soit $X$ une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La fonction ou série génératrice de $X$ est la série entière :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n = E(t^X).$$

Le rayon de convergence est au moins 1 avec $G_X(1) = 1$.

*Propriété* :

Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Quand les séries convergent, on a :

$$G_{X_1+X_2} = G_{X_1}G_{X_2}.$$

### IV-2. Série génératrice des lois usuelles

*Propriété* :

Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs entières.

- Si $X(\Omega)$ est fini de cardinale $N$ et $X$ suit une loi uniforme, alors $G_X(t) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n\in X(\Omega)} t^n$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $G_X(t) = pt + 1 - p$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $G_X(t) = (pt+1-p)^n$ sur $\mathbb{R}$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ sur $\left]-\dfrac{1}{1-p}, \dfrac{1}{1-p}\right[$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ sur $\mathbb{R}$.