Résumé du chapitre 19 : Fonctions de plusieurs variables

L'étude des limites et de la continuité de fonctions entre deux espaces vectoriels normés a été vue dans le chapitre sur les espaces normés.

Dans tout le chapitre, l'espace $\mathbb{R}^p$ est normé (sauf mention contraire, on utilisera la norme euclidienne canonique), $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et p est un entier naturel non nul et f est une fonction définie sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I - Fonctions de classe C^1

I-1. Définition

a. Dérivée selon un vecteur :

Définition :

> Soient deux vecteurs $a \in U$ et $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $u \neq 0$.
>
> Si la fonction $t \mapsto f(a+tu)$ (de la variable réelle *t*) est dérivable en 0, on dit que *f* admet une dérivée en *a* selon le vecteur *u*.

b. Dérivées partielles premières :

On note $x_1, x_2, \dots, x_p$ les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^p$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_p)$.

Définition :

> Soit $a \in U$ et $i \in [\![1, p]\!]$.
>
> Si *f* admet une dérivée en *a* suivant e_i, on l'appelle dérivée partielle (d'ordre 1) par rapport à x_i et on la note $\partial_i f(a)$ ou (plus souvent) $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Propriété :

> Soit $a \in U$ et $i \in [\![1, p]\!]$. Si on note $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p)$ l'application partielle, on a :
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(a_i).$$
>
> Autrement dit, si elle existe, la dérivée partielle est la dérivée de l'application partielle.

c. Classe C^1 :

Définition :

> Soit $a \in U$.
>
> La fonction *f* est de classe C^1 en *a* (*resp.* sur *U*) si ses dérivées partielles d'ordre 1 en *a* (*resp.* sur *U*) existent et sont continues en *a* (*resp.* sur *U*).

Notation : On note $C^1(U, \mathbb{R})$ (ou $C^1(U)$ si ce n'est pas ambigu) l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur *U*.

Théorème :

Si f est de classe C^1 sur U, alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre 1 de la forme :

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right).$$

Corollaire 1 :

Une fonction de classe C^1 sur U est continue sur U.

Corollaire 2 :

Si f est de classe C^1 sur U, alors pour tous $a\in U$, $u\in\mathbb{R}^p$ tel que $u\neq 0$ et $t\in\mathbb{R}$ tel que $a+tu\in U$:

$$f(a+tu)=f(a)+\left(\sum_{i=1}^{p} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)t+\underset{t\to 0}{o}(t).$$

I-2. Gradient et différentielle

Définitions :

Si f admet des dérivées partielles en a, alors le gradient de f en a est le vecteur $\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)e_i$, noté $\nabla f(a)$.

La différentielle de f en a, notée $df(a)$, est (quand elle est définie) la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$:

$$df(a):(h_1,\dots,h_p)\mapsto df(a)\cdot h=\left(h\,|\,\nabla f(a)\right)=\sum_{i=1}^{p} h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

I-4. Opérations sur les fonctions de classe C^1

a. Opérations usuelles :

Propriétés :

- $\left(C^1(U,\mathbb{R}),+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par produit.
- Si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur U telles que g ne s'annule pas sur U, alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur U.

b. Règle de la chaîne :

Propriété : (*règle de la chaîne*)

Si f est de classe C^1 sur U et $\varphi: I\to U\ ;\ t\mapsto\left(\varphi_1(t),\dots,\varphi_p(t)\right)$ est une application de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f\circ\varphi$ est de classe C^1 sur I avec pour tout $t\in I$:

$$(f\circ\varphi)'(t)=\sum_{i=1}^{p}\varphi_i'(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\varphi(t)\right)=\left(\varphi'(t)\,|\,\nabla f\left(\varphi(t)\right)\right).$$

Corollaire :

Si f est de classe C^1 sur U (ouvert de $\mathbb{R}^2$ ici) et $\varphi:(u,v)\mapsto(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v))$ est une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans U, alors $F=f\circ\varphi$ est de classe C^1 sur V avec :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u,v)\big)\\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)=\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u,v)\big)+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u,v)\big)\end{cases}$$

En coordonnées polaires :

Dans le plan ($\mathbb{R}^2$), les coordonnées polaires sont (r,θ) avec :

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

où (x,y) sont les coordonnées cartésiennes.

L'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et, avec $f(x,y)=F(r,\theta)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial\theta}\end{cases}$$

c. Inégalité des accroissements finis :

Propriété :

On suppose que U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et que f est de classe C^1 sur U.

Alors, f est constante sur U si et seulement si $\nabla f=0$ sur U.

II - Recherche d'extremums

II-1. Extremum local, global

Définitions :

On dit que f admet un maximum (*resp.* minimum) local en a si, au voisinage de a, $f(x)\le f(a)$ (*resp.* $f(x)\ge f(a)$).

On dit que f admet un maximum (*resp.* minimum) global en a si, pour tout $x\in U$, $f(x)\le f(a)$ (*resp.* $f(x)\ge f(a)$).

Dans les deux cas, on parle d'extremum local ou global.

Si f admet des dérivées partielles sur U, on dit que a est un point critique si $\nabla f(a)=0$, autrement dit, si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

Propriété :

Si f est de classe C^1 sur U et admet un extremum (local ou global) en a, alors a est un point critique.

II-2. Recherche d'extremums

Pour déterminer les extremums d'une fonction de classe C^1, on procède en deux étapes.

- On cherche les points critiques dans *U*.
- En chaque point critique *a*, on détermine si on est en présence d'un extremum ou pas.

  Pour cela, on peut faire un développement limité en 0 de $\varphi_u : t \mapsto f(a+tu) - f(a)$ avec u un vecteur fixé non nul de $\mathbb{R}^p$. Comme *U* est ouvert est $a \in U$

  Si, quels que soit le vecteur u de $\mathbb{R}^p$, le premier terme du développement limité est toujours du même signe, alors on a un extremum *local* : un minimum si ce terme est positif, un maximum sinon.

III - Dérivées partielles d'ordre deux

III-1. Généralités

Définition :

> On dit que *f* est de classe C^2 sur *U* si elle y est de classe C^1, ainsi que toutes ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Notation : On note $C^2(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur *U* et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété :

> $C^2(U,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par produit et quotient quand il est défini.

Théorème (de Schwarz) :

> Si *f* est de classe C^2 sur *U*, alors pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

III-2. Equations différentielles

Concernant cette partie, le programme dit : « *Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre* ». Il n'y a ni résultat pas de théorèmes généraux, mais quelques exemples à savoir faire.

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles, on raisonne par analyse-synthèse. Le théorème de Schwarz sert souvent pour résoudre de telles équations.

Le programme dit : « *Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires* ».