Résumé du chapitre 2 : Espaces vectoriels normés

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I – Normes

I-1. Vocabulaire

Définitions :

On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité) ;
- $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation) ;
- $\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé (EVN), noté (E, N).

On appelle vecteur unitaire ou normé tout vecteur de norme 1.

Si la norme découle d'un produit scalaire ($N(x) = \sqrt{(x \mid x)}$), on dit que c'est une norme euclidienne.

Dans la suite, et sauf mention contraire, on se place dans un EVN, $(E, \|\cdot\|)$.

Définitions :

Soient $x_0 \in E$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$.

La boule ouverte de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $B(x_0, R) = \{x \in E \setminus \|x - x_0\| < R\}$.

La boule fermée de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $\overline{B}(x_0, R) = \{x \in E \setminus \|x - x_0\| \leq R\}$.

La sphère de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $S(x_0, R) = \{x \in E \setminus \|x - x_0\| = R\}$.

En dimension 2, une boule est un disque et une sphère est un cercle.

Définitions :

Une partie A de E est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq M$.

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$.

Une application $f : X \to E$ (où X est un ensemble quelconque) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leq M$.

I-2. Normes usuelles

a. Norme infinie :

Propriété et définition :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E est l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.

$N : f \mapsto \sup_I |f|$ est une norme, appelée norme infinie, notée $\|\cdot\|_\infty$.

b. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$:

Propriétés :

Soient $p \in \mathbb{N}^*$. Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{K}^p$:

- $N_\infty : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \max\limits_{k \in [\![1,p]\!]} |x_k|$
- $N_1 : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sum\limits_{k=1}^{p} |x_k|$
- $N_2 : (x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{p} |x_k|^2}$

I-3. Distance associée à une norme

Définitions : (***non mentionnées dans le programme***)

Une distance sur E est une application $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation).
- $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel muni d'une distance est appelé espace métrique.

Propriété et définitions :

L'application $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ est une distance sur E.

Cette distance est appelée distance associée à la norme $\|.\|$.

Si la norme est euclidienne, on dit que la distance associée est une distance euclidienne.

I-4. Convexité

Définitions :

Soient x et y deux vecteurs de E.

Le segment $[x, y]$ est l'ensemble des vecteurs de E de la forme $tx + (1-t)y$ avec $t \in [0,1]$.

Une partie A de E est convexe si pour tout $(x, y) \in A^2$, $[x, y] \subset A$.

Propriété :

Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.

I-5. Normes équivalentes : *hors programme*

Définitions :

Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ de E sont équivalentes s'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $x \in E$:

$$a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1 .$$

Propriété :

La relation « est équivalente à » pour les normes d'un EVN est une relation d'équivalence.

Théorème :

Toutes les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes.

II – Convergence de suites dans un espace vectoriel normé

II-1. Généralités

Définitions :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de *E*.

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un vecteur *a* de *E* tel que :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq N \ \Rightarrow\ \|x_n - a\| \leq \varepsilon .$$

Dans ce cas, on dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite *a* ou converge vers *a*. On note $x_n \to a$.

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Propriétés :

- Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de *E* converge alors sa limite est unique. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou $\lim x_n$.
- Toute suite convergente de *E* est bornée.
- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.
- L'ensemble des suites convergentes de *E* est un espace vectoriel.

Propriété :

Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes de *E*.

La convergence d'une suite pour $\|\cdot\|_1$ équivaut à sa convergence pour $\|\cdot\|_2$.

II-2. Convergence dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans cette partie, on suppose que *E* est de dimension finie.

Théorème :

La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

Propriété :

Soient une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ fixée de *E* (qui est alors de dimension *p*) et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{p,n}$ les coordonnées de x_n dans la base $\mathcal{B}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les *p* suites scalaires $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et dans ce cas :

$$\lim x_n = (\lim x_{1,n})\, e_1 + (\lim x_{2,n})\, e_2 + \ldots + (\lim x_{p,n})\, e_p .$$

III – Topologie d'un espace vectoriel normé

III-1. Ouverts

Définitions :

Soit *A* une partie de *E*. Un élément *a* de *A* est intérieur à *A* s'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r)$ soit incluse dans *A*.

L'intérieur de *A*, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à *A*.

On dit que *A* est une partie ouverte de *E* si tous ses points sont intérieurs.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

L'intérieur d'une partie A de E est le plus grand ouvert inclus dans A (au sens de l'inclusion).

Propriété :

Une boule ouverte est un ouvert.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme***)

- L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
- Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

III-2. Fermés

Définitions :

Soit A une partie de E.

Un élément a de A est adhérent à A s'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers a.

L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.

La frontière de A, notée $Fr(A)$, est l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

On dit que A est une partie fermée de E si tous les points adhérents de A appartiennent à A.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

L'adhérence d'une partie A de E est le plus petit fermé contenant A (au sens de l'inclusion).

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

Une partie A est fermée dans E si et seulement si son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert de E.

Propriété : *Caractérisation séquentielle*.

Une partie A est fermée dans E si et seulement si toute suite convergente de A converge dans A.

Propriété :

- Une boule fermée est un fermé.
- Une sphère est un fermé.

Propriétés : (***non mentionnées dans le programme***)

- La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

III-3. Cas de la dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie $p > 0$ et toujours muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

Les ouverts et fermés de E sont les mêmes pour toutes les normes.

Théorème :

Si u est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans E, alors :

- $N : x \mapsto \|u(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^p$;
- Une partie A de E est ouverte (*resp*. fermée) dans E si et seulement si $u^{-1}(A)$ est une partie ouverte (*resp*. fermée) de $\mathbb{K}^p$.

Propriété : (***hors programme***)

En dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E distinct de E est fermé et d'intérieur vide.