Résumé du chapitre 5 : Séries entières

Sauf mention contraire, on considère des fonctions à variable réelle ou complexe et à valeurs dans $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définitions fondamentales

- Une série entière est une série de fonctions du type $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes.
- Le rayon de convergence d'une telle série est le plus grand réel positif R tel que la série converge sur $D(0,R)$ (le disque ouvert de centre 0 et de rayon R), appelé disque ouvert de convergence (l'intervalle $]-R,R[$, appelé intervalle de convergence, dans le cas des séries réelles).
- L'ensemble des z tels que $|z| = R$ est appelé bord du disque ouvert ou de l'intervalle de convergence.
- Une fonction *f* définie au voisinage de 0 est dite développable en série entière sur $D(0,r)$ (ou $]-r,r[$, dans le cas réel) s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur $D(0,r)$.
- Si *f* est une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0, la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est appelée série de Taylor de *f*.

Trouver un rayon de convergence

- *Lemme d'Abel* : Le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le plus grand réel positif R tel que la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée pour tout z tel que $|z| < R$, c'est-à-dire :
$$|z| < R \Rightarrow (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \quad \text{et} \quad |z| > R \Rightarrow (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ non bornée}.$$
- *Règle de d'Alembert.*
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
- *Comparaison* :
  - $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$;
  - $a_n \sim b_n \Rightarrow R_a = R_b$.
- *Opérations* : Le rayon de convergence $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ et du produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Propriété fondamentale de convergence

Une série entière converge normalement sur tout compact (boule fermée entre autres) / segment inclus dans le disque / l'intervalle de convergence.

☠ *On ne sait a priori rien sur le bord* ($|z| = R$) *ne serait-ce qu'en termes de convergence simple* (*donc absolue ou normale…*).

Conséquences

- $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ (où R est le rayon de convergence).

  Dérivation terme à terme : Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-R, R[$:

  $$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} .$$

  Ces séries entières admettent aussi R pour rayon de convergence.

- *Intégration terme à terme* : Si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors pour tout $x \in]-R, R[$:

  $$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} .$$

  Cette série admet aussi R pour rayon de convergence.

- Si une fonction est développable en série entière, de rayon de convergence R, alors elle est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et son développement en série entière est unique, égal à la série de Taylor de la fonction. Pour tout $x \in]-R, R[$:

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

  ☠ *La série de Taylor peut avoir un rayon de convergence nul ou un rayon de convergence non nul alors que la fonction n'est pas développable en série entière.*

Prouver qu'une fonction est développable en série entière

On utilise les propriétés sur les opérations :

- La somme et le produit de deux fonctions développables en séries entières est développable en série entière et le rayon de convergence de la somme ou du produit supérieur ou égale au plus petit des deux rayons.
- La dérivée et les primitives d'une fonction développable en série entière sont développables en série entière sur le même disque de convergence.

☠ *Il n'y a pas dans le cours de théorème sur le quotient ou la composée de deux fonctions…*

Séries entières de référence

- $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ $(R = +\infty)$.
- $\mathrm{ch}\, x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ $(R = +\infty)$.
- $\mathrm{sh}\, x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ $(R = +\infty)$.
- $\cos x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ $(R = +\infty)$.
- $\sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ $(R = +\infty)$.
- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$ $(R = 1)$.
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ $(R = 1)$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(R = 1)$.
- $\arctan x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $(R = 1)$.

  Pour les fonctions arc…, penser à intégrer les dérivées.