

## Résumé du chapitre 6 : Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et on considère  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### I - Produit et somme d'espaces vectoriels

#### I-1. Produit d'espaces vectoriels

Dans cette partie, on considère  $E_1, E_2, \dots, E_p$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Définition :

Le produit cartésien de  $E_1, E_2, \dots, E_p$  est l'ensemble noté  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ , tel que :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_p), \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

Propriété :

Muni des lois ci-dessus,  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  est un  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Propriété :

Si  $E_1, E_2, \dots, E_p$  sont de dimension finie, respectivement  $n_1, n_2, \dots, n_p$ , alors  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$  est de dimension finie qui est  $n_1 + n_2 + \dots + n_p$ .

#### I-2. Somme d'espaces vectoriels

a. Somme et somme directe :

Propriété et définition :

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces de  $E$  (avec  $p \in \mathbb{N}^*$ ).

L'ensemble  $\{x_1 + x_2 + \dots + x_p, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé somme de  $F_1, F_2, \dots$  et  $F_p$  et noté  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ .

De plus, on dit que la somme est directe si la décomposition d'un vecteur  $x$  de  $F_1 + F_2 + \dots + F_p$  en  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$ , avec  $x_i \in F_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , est unique. On note alors  $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ .

Propriété : (non mentionnée dans le programme)

Si  $F_1, F_2, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de  $E$  (avec  $p \in \mathbb{N}^*$ ), on a :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \text{Vect}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_p).$$

b. Caractérisation d'une somme directe :

Propriété : (non mentionnée dans le programme)

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces de  $E$  (avec  $p \in \mathbb{N}^*$ ).

On a  $F_1 + F_2 + \dots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$  si et seulement si :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0 \text{ avec } x_i \in F_i \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, p \rrbracket \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0.$$

### c. Cas de la dimension finie :

Dans cette partie,  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### Propriétés et définitions :

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $F$ , on peut la compléter en une base  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ , dite adaptée à  $F$ .

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces de  $E$  (avec  $p \in \mathbb{N}^*$ ) de dimensions respectives  $n_1, n_2, \dots, n_p$  et tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ . Si, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_k$  est une base de  $F_k$ , alors  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$  est une base de  $E$ , dite adaptée à la décomposition  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ .

#### Propriété :

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $n_1, n_2, \dots, n_p$  des entiers naturels non nuls dont la somme vaut  $n$  (où  $p$  est un entier supérieur ou égal à 2). On pose pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Si, pour tout  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ , on pose  $F_k = \text{Vect}(e_{N_k+1}, e_{N_k+2}, \dots, e_{N_{k+1}})$ , alors  $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_{p-1}$ .

#### Propriété :

Soient  $F_1, F_2, \dots, F_p$  des sous-espaces de  $E$  (avec  $p \in \mathbb{N}^*$ ). On a :

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

## II - Matrices et endomorphismes

Dans cette partie,  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, respectivement  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

### II-1. Matrices et applications linéaires : rappels fondamentaux de première année

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$  une base de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

La matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , notée  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ , est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

Réciproquement, toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  peut être vue comme la matrice d'une application  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$ , appelée application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A$ .

Considérons maintenant deux autres bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$  de  $E$  et  $F$  respectivement.

Pour tout  $x \in E$ , si on note  $X$  (resp.  $X'$ ) le vecteur colonne des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ) et si  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , on a :

$$\underline{X = PX'}$$

On a une relation similaire dans  $F$ , avec  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$ .

Si on pose  $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  et  $B = M_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$ , alors :

$$\underline{B = Q^{-1}AP}$$

Si maintenant  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $A = M_{\mathcal{B}}(u)$  et  $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$ , on a :

$$\underline{B = P^{-1}AP.}$$

Définition :

Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables, s'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

Propriétés :

- La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $A = M_{\mathcal{B}}(u)$  et  $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$  sont semblables avec la relation  $B = P^{-1}AP$  où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .
- Deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dans des bases différentes.

## II-2. Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

a. Généralités :

Pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ , on peut écrire (avec  $A^0 = I_n$ ) :

$$P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{p-1} A^{p-1} + a_p A^p.$$

On parle de polynôme de matrice.

De la même façon, on parle de polynôme de l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  pour désigner l'endomorphisme de  $E$  :

$$P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k = a_0 id_E + a_1 u + \dots + a_{p-1} u^{p-1} + a_p u^p.$$

Propriété : (non mentionnée dans le programme)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , on a  $P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$ .

Propriétés : (non mentionnée dans le programme)

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , telles que  $B = P^{-1}AP$  avec  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ .

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B^k = P^{-1}A^kP$  :  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables avec la même matrice de passage  $P$ .
- Pour tout  $f \in \mathbb{K}[X]$ ,  $f(B) = P^{-1}f(A)P$  :  $f(A)$  et  $f(B)$  sont semblables avec la même matrice de passage  $P$ .

b. Polynôme annulateur :

Définition :

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

- Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on dit que  $P$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A$  si  $P(A) = 0_n$ .
- Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que  $P$  est un polynôme annulateur de l'endomorphisme  $u$  si  $P(u) = 0$ .

**Propriété : (non mentionnée dans le programme)**

L'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Propriété : (non mentionnée dans le programme)**

Toute matrice carrée admet des polynômes annulateurs.

**c. Application au calcul des puissances d'une matrice :**

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul des puissances d'un endomorphisme.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme unitaire, de degré  $p$ , annulateur de  $A$ , alors toute puissance de  $A$  est une combinaison linéaire de  $I_n, A, \dots, A^{p-1}$ .

**d. Application au calcul de l'inverse d'une matrice :**

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul de la réciproque d'un automorphisme.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme annulateur de  $A$  tel que  $a_0 \neq 0$ .

Donc,  $A$  est inversible, d'inverse  $-\frac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \dots - \frac{a_1}{a_0} I_n$ .

**II-3. Matrices par blocs****Définition :**

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On dit que  $M$  est définie par blocs si :

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

avec  $A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}(\mathbb{K})$  et  $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}(\mathbb{K})$  où  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $s \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

En particulier, pour une matrice carrée, on peut parler de matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure) par blocs, qui est de la forme :

$$\left( \begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \text{resp.} \\ \left( \begin{array}{cccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{s-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{s,r} \end{array} \right), \text{ resp.} \\ \left( \begin{array}{cccc} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{s,1} & \cdots & A_{s,r-1} & A_{s,r} \end{array} \right) \end{array} \right)$$

avec  $A_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{K})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ .

**Propriétés :**

- Combinaisons linéaires de matrices par blocs :

$$\lambda \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) + \mu \left( \begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda A + \mu A' & \lambda B + \mu B' \\ \hline \lambda C + \mu C' & \lambda D + \mu D' \end{array} \right)$$

- La transposée de  $\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$  est  $\left( \begin{array}{c|c} {}^t A & {}^t C \\ \hline {}^t B & {}^t D \end{array} \right)$ .

- Produit de matrices par blocs :

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array} \right)$$

## II-4. Stabilité par un endomorphisme

### Définitions et propriété :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $u$  si  $u(F) \subset F$ .

Dans ce cas, l'application de  $F$  dans  $F$  qui à  $x \in F$  associe  $u(x)$  est un endomorphisme de  $F$ , appelé endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

### Propriété :

Si  $E_1, E_2, \dots, E_p$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  et si  $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , alors il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $u|_{E_i} = u_i$ .

### Propriété :

Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $f$  et  $g$  commutent alors le noyau et l'image de  $f$  sont stables par  $g$ .

## II-5. Trace

### a. Trace d'une matrice :

#### Définition :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On appelle trace de  $A$  la somme de ses éléments diagonaux, on la note  $Tr(A)$  ou  $tr(A)$ .

#### Propriétés :

- L'application  $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire.
- Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ , on a  $Tr(AB) = Tr(BA)$ .
- Deux matrices semblables ont même trace.
- Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $Tr({}^t A) = Tr(A)$ .

### b. Trace d'un endomorphisme :

Dans cette partie,  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### Propriété et définition :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , le scalaire  $Tr(M_{\mathcal{B}}(u))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  et est appelé trace de  $u$ , noté  $Tr(u)$  ou  $tr(u)$ .

Propriétés :

- L'application  $Tr : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire.
- $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, Tr(uv) = Tr(vu)$ .

Propriétés : (non mentionnée dans le programme)

- La trace d'un projecteur est égale à son rang.
- La trace d'une symétrie par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$  est égale à  $\dim F - \dim G$ .

**III - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie**

Dans cette partie,  $E$  est de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**III-1. Formes linéaires**Définition :

Un forme linéaire est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

**III-2. Hyperplans**Définition :

Un hyperplan de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui admet une droite pour supplémentaire.

Propriété :

Un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  (de dimension  $n$ ) est un hyperplan si et seulement si  $\dim H = n - 1$ .

**III-3. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie**Propriété et définition :

Un sous-espace  $H$  de  $E$  est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire  $\varphi$  non nulle sur  $E$ .

L'équation  $\varphi(x) = 0$  est alors appelée une équation cartésienne de  $H$ .

Propriété et définition :

Deux équations linéaires (dans une base donnée) définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.