

Résumé du chapitre 8 : Réduction d'endomorphisme

Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et on considère E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

I - Eléments propres

I-1. Généralités

Le vocabulaire (valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée) a été vu dans le chapitre précédent.

Rappelons que si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \in Sp(u)$ si et seulement si $\ker(u - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$ et dans ce cas, le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$.

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et D une droite de E .
Si D est stable par u , alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in D$, $u(x) = \lambda x$.

Propriété :

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent ($uv = vu$), alors les sous-espaces propres de u sont stables par v .
En particulier, les sous-espaces propres de u sont stables par u .

Propriété :

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme (*resp.* d'une matrice carrée) sont en somme directe.

I-2. Polynôme caractéristique

Dans toute la suite, on suppose que E est de dimension finie n .

Le vocabulaire (polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme) a été vu dans le chapitre précédent, ainsi que les notations χ_A , χ_u .

Théorème :

Les valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

Propriété :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Si χ_u (*resp.* χ_A) est scindé, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (distinctes ou non), alors :

$$\det u = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n \quad (\text{resp. } \det A = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n).$$

$$\text{Tr}(u) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad (\text{resp. } \text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si F est un sous-espace de E stable par u et u_F est l'endomorphisme induit sur F , alors le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u .

Définition :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u (resp. de A).

La multiplicité de λ dans χ_u (resp. χ_A) est appelé multiplicité de la valeur propre λ .

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur de u de multiplicité n_λ et E_λ le sous-espace propre associé. On a :

$$\dim E_\lambda \leq n_\lambda.$$

II - Diagonalisation**II-1. Définition**Définition :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

II-2. CaractérisationPropriété :

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E .

Corollaires :

- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n , la dimension de E .
- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans \mathbb{K} et si la dimension de tout sous-espace propre associé une valeur propre λ est égale à la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples dans \mathbb{K} , alors u est diagonalisable.

II-3. Exemples d'applicationsa. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (les λ_i étant les valeurs propres de A) et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ avec $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.

b. Application à la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants :

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_k u_{n+k} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

Les a_k étant des scalaires fixés et $p \in \mathbb{N}^*$. Si on pose $X_n = {}^t(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1})$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n X_0 \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

III - Diagonalisation et polynômes annulateurs

III-1. Quatre lemmes : hors programme

III-2. Nouvelles caractérisations de diagonalisation

Propriété :

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Il en va de même pour une matrice carrée.

Propriété :

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet $P = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

III-3. Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : (de Cayley-Hamilton)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Autrement dit, le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u .

III-4. Cas des endomorphismes induits

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par u .
L'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

IV - Trigonalisation

Définition :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Propriété :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

L'endomorphisme u (resp. la matrice A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps \mathbb{K} .

En particulier, tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel est trigonalisable.