

## Résumé du chapitre 9 : Dérivation et courbes paramétrées

L'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique. On note  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme. Remarquons que  $\mathbb{C}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , donc les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sont concernées ici.

Dans tout le chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $t \mapsto f(t)$  est une fonction définie sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### I - Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

#### I-1. Généralités

Définitions :

Soit  $a \in I$ .

Le taux d'accroissement ou taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $t$  est  $\frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si le taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $t$  admet une limite (vectorielle) finie quand  $t$  tend vers  $a$ . Cette limite, notée  $f'(a)$ , est appelée dérivée de  $f$  en  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ .

Dans ce cas, la fonction  $t \mapsto f'(t)$  est appelée fonction dérivée de  $f$ .

Propriété et définition :

La fonction  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$f(t) = f(a) + (t-a)\ell + o_a(t-a).$$

Dans ce cas, le vecteur  $\ell$  est le vecteur dérivé  $f'(a)$  et la relation ci-dessus est appelée développement limité d'ordre 1 de  $f$  en  $a$ .

#### I-2. Opérations

Propriétés :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

- Si  $f$  et  $g$  sont dérivables en  $a \in I$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$ , de nombre dérivé  $\lambda f'(a) + \mu g'(a)$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ , alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est dérivable sur  $I$ , de fonction dérivé  $\lambda f' + \mu g'$ .

Propriété : (non mentionnée dans le programme)

Si  $f$  et  $h$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}$  respectivement et toutes deux dérivables sur  $I$ , alors  $hf$  est dérivable sur  $I$  et  $(hf)' = h'f + hf'$ .

Propriétés :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

- Si  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $L \circ f$  est dérivable sur  $I$ , de dérivée  $L \circ f'$ .
- Si  $B$  est une application bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , alors la fonction (à valeurs réelles)  $B(f, g)$  est dérivable sur  $I$ , de dérivée  $B(f', g) + B(f, g')$ .
- Si  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi: J \rightarrow I$  dérivable, alors  $f \circ \varphi$  est dérivable sur  $J$ , de dérivée  $\varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$ .

Corollaires :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

- $(f \mid g)$  est dérivable sur  $I$  et  $(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')$ .
- Si  $n = 2$ ,  $\det(f, g)$  est dérivable sur  $I$  et  $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$ .
- $\|f\|$  est dérivable en tout point  $t$  de  $I$  où  $f(t) \neq 0$  et  $\|f\|' = \frac{(f' \mid f)}{\|f\|}$ .

**II - Fonctions de classe  $C^k$** **II-1. Généralités**Définitions :

Soit  $k$  un entier naturel.

Si on note  $f^{(0)} = f$ , on dit que  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $I$  si  $f$  est  $k-1$  dérivable sur  $I$  et sa dérivée  $(k-1)^{\text{ième}}$  est dérivable sur  $I$ . La dérivée  $k^{\text{ième}}$  de  $f$  est notée  $f^{(k)}$ ,  $\frac{d^k f}{dt^k}$ , parfois  $D^k f$ .

On dit que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ , si elle est  $k$  fois dérivable sur  $I$  pour tout entier naturel  $k$ .

Pour  $0 \leq k \leq \infty$ , on dit que  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  si  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(k)}$  est continue sur  $I$  (si  $k < \infty$ ).

*Notation :* On note  $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ , l'ensemble des fonctions de classe  $C^k$  sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Propriété :

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $t \in I$ , on note  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  les coordonnées de  $f(t)$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  si et seulement les fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de sont et dans ce cas, on a  $f^{(k)} = f_1^{(k)}e_1 + f_2^{(k)}e_2 + \dots + f_n^{(k)}e_n$ .

**II-2. Opérations**Propriétés :

Soient  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^k$  sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

- Pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda f + \mu g$  est dérivable en  $a$ , de fonction dérivée  $\lambda f' + \mu g'$ .
- Si  $h$  est une fonction de classe  $C^k$  sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors  $hf$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ .

- Si  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $L \circ f$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et  $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$ .
- Si  $B$  est une application bilinéaire sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $B(f, g)$  est de classe  $C^k$  sur  $I$ , en particulier  $(f \mid g)$  et  $\det(f, g)$  quand  $n = 2$ .
- Si  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi: J \rightarrow I$  de classe  $C^k$ , alors  $f \circ \varphi$  est de classe  $C^k$  sur  $J$ .
- $\|f\|$  est de classe  $C^k$  en tout point  $t$  de  $I$  où  $f(t) \neq 0$ .

### II-3. Formules de Taylor

Théorèmes :

Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $a \in I$ .

*Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $p$  :*

Si  $f$  est de classe  $C^{p+1}$  sur  $I$ , alors pour tout  $t \in I$  :

$$f(t) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k + \int_a^t \frac{(t-u)^p}{p!} f^{(p+1)}(u) du.$$

*Formule de Taylor-Young à l'ordre  $p$  :*

Si  $f$  est de classe  $C^p$  sur  $I$ , alors :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_0(h^p).$$

### III - Arcs paramétrés

Dans cette partie,  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout  $t \in D$ , on note  $x(t)$  et  $y(t)$  les coordonnées de  $f(t)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . On a donc  $\vec{f}: t \mapsto (x(t), y(t))$ .

Le plan affine usuel est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### III-1. Définition

Définitions :

La courbe ou arc paramétré(e) associé(e) à  $\vec{f}$  est l'ensemble des points  $M(t)$  du plan tels que pour tout  $t \in D$ , on a  $\overline{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ .

Si  $\vec{f}$  est de classe  $C^k$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ , on dit que l'arc paramétré est de classe  $C^k$ .

#### III-2. Construction d'arcs plans

a. Réduction de l'ensemble d'étude :

Périodicité :

Si  $x$  et  $y$  sont  $T$ -périodiques avec  $T > 0$ , alors la courbe est parcourue entièrement quand  $t$  décrit l'intersection de  $D$  et d'un intervalle de longueur  $T$ .

*Symétries :*

On peut établir des symétries de la courbe s'il existe un réel  $a$  tel que pour tout  $t \in D$ ,  $a-t \in D$  (ceci revient à dire que  $D$  est symétrique par rapport à  $\frac{a}{2}$ ). Si l'une des propriétés suivantes est vérifiée, on peut réduire le domaine d'étude à la partie de  $D$  telle que  $t \geq a/2$ .

- Si  $\begin{cases} x(a-t) = x(t) \\ y(a-t) = y(t) \end{cases}$ , alors la courbe est parcourue deux fois.
- Si  $\begin{cases} x(a-t) = 2x_0 - x(t) \\ y(a-t) = y(t) \end{cases}$ , alors la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation  $x = x_0$ .
- Si  $\begin{cases} x(a-t) = x(t) \\ y(a-t) = 2y_0 - y(t) \end{cases}$ , la courbe est symétrique par rapport à la droite horizontale d'équation  $y = y_0$ .
- Si  $\begin{cases} x(a-t) = 2x_0 - x(t) \\ y(a-t) = 2y_0 - y(t) \end{cases}$ , alors la courbe est symétrique par rapport au point  $A(x_0, y_0)$ .
- Si  $\begin{cases} x(a-t) = y(t) \\ y(a-t) = x(t) \end{cases}$ , alors la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation  $y = x$ .

*Méthode :*

1. Vérifier l'éventuelle périodicité commune des fonctions  $x$  et  $y$  ;
2. Vérifier la parité des fonctions  $x$  et  $y$  ;
3. Si le domaine d'étude est symétrique par rapport à un nombre, la symétrie par rapport ce nombre peut parfois permettre de diviser par deux l'ensemble d'étude.

**b. Variations et limites :**

Comme pour une fonction numérique usuelle, on étudie les variations (dérivées) et les limites des deux fonctions  $x$  et  $y$  sur leur ensemble de définition commun (éventuellement réduit). On dresse alors un tableau de variations synthétique.

*Exemples : (1) et (2).*

**c. Tangentes :**Définitions :

On suppose que  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est dérivable en  $t_0$ .

Si  $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$  (i.e.  $x'(t_0) \neq 0$  ou  $y'(t_0) \neq 0$ ) alors on dit que  $M(t_0)$  est un point régulier.

Si  $\vec{f}'(t_0) = \vec{0}$  (i.e.  $x'(t_0) = 0$  et  $y'(t_0) = 0$ ) alors on dit que  $M(t_0)$  est un point stationnaire ou singulier.

Si tous les points de la courbe sont réguliers, on dit qu'elle est régulière.

On suppose que  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est deux fois dérivable en  $t_0$ .

Si la famille  $(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0))$  est libre, on dit que  $M(t_0)$  est un point birégulier.

Si tous les points de la courbe sont biréguliers, on dit qu'elle est birégulière.

Définitions :

On suppose que  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est définie au voisinage de  $t_0$ .

La courbe associée à  $\vec{f}$  admet une tangente en  $M(t_0)$  si l'on peut trouver une fonction vectorielle  $\vec{u}(t)$  telle que  $\vec{u}(t)$  soit un vecteur directeur de la corde  $(M(t_0)M(t))$  et  $t \mapsto \vec{u}(t)$  admet une limite finie non nulle quand  $t$  tend vers  $t_0$ . Cette limite est un vecteur tangent à la courbe au point considéré.

Quand la courbe admet une tangente, la normale à la courbe est la droite perpendiculaire à la tangente au point considéré. Un vecteur normal est un vecteur directeur de la normale à la courbe.

Propriété :

Si  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est définie au voisinage de  $t_0$  et  $M(t_0)$  est un point régulier, alors la courbe admet une tangente dirigée par  $\vec{f}'(t_0)$ .

Que faire dans le cas d'un point stationnaire ?

1) Si  $x'(t)$  et  $y'(t)$  ont un facteur commun  $h(t)$  tel que  $\frac{1}{h(t_0)} \vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$ ,  $\frac{1}{h(t_0)} \vec{f}'(t_0)$  dirige la tangente.

2) Si  $x'(t)$  ne s'annule pas au voisinage de  $t_0$  :, on peut étudier  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)}$ .

- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \alpha \in \mathbb{R}$ , alors  $\vec{i} + \alpha \vec{j}$  dirige la tangente.

- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \pm \infty$ , alors on a une tangente verticale.

3) Si  $\vec{f}$  est  $n$  fois dérivable en  $t_0$ , alors la tangente est dirigée par le premier vecteur  $\vec{f}^{(k)}(t_0)$  non nul.

d. Branches infinies :Définition :

La courbe associée à une fonction  $t \mapsto \vec{f}(t)$  admet une branche infinie s'il existe  $t_0$  (éventuellement infini) tel que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{f}(t)\| = +\infty$ .

Plusieurs cas de figure se présentent :

1)  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$  : la courbe admet une asymptote horizontale d'équation  $y = y_0$ .

2)  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty \end{cases}$  : la courbe admet une asymptote verticale d'équation  $x = x_0$ .

3)  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm \infty \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm \infty \end{cases}$  : on étudie alors  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ .

- Si cette limite est infinie, on dit qu'il y a une branche parabolique (de direction verticale).

- Si cette limite vaut  $a \in \mathbb{R}$  alors on dit qu'il y a une direction asymptotique  $y = ax$  (ou branche parabolique de direction  $y = ax$ , horizontale si  $a = 0$ ).
- Si  $\lim_{t \rightarrow t_0} [y(t) - ax(t)] = b \in \mathbb{R}$ , alors la courbe admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$ .

### III-3. Etude locale en un point

#### a. Introduction :

On suppose ici que  $\vec{f}$  est de classe  $C^n$  au voisinage de  $t_0$  avec  $n \geq 2$  et que :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0) = h^p P(h) \frac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!} + h^q \frac{\vec{f}^{(q)}(t_0)}{q!} + \bar{o}(h^q).$$

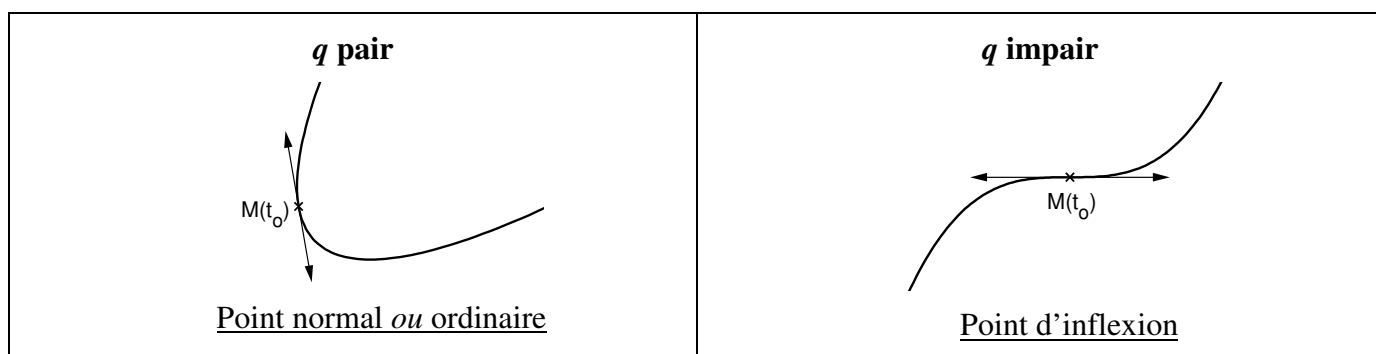
Avec  $1 \leq p < q \leq n$ ,  $P$  une fonction polynôme en  $h$  (pour  $p \leq k \leq q-1$ ,  $\vec{f}^{(k)}(t_0)$  est colinéaire à  $\vec{f}^{(p)}(t_0)$ ) et  $\vec{f}^{(k)}(t_0)$  et  $\vec{f}^{(p)}(t_0)$  non est colinéaires. On a :

$$[x(t_0+h) - x(t_0)] y^{(p)}(t_0) - [y(t_0+h) - y(t_0)] x^{(p)}(t_0) = \frac{h^q \delta}{q!} + o(h^q)$$

avec  $\delta = \det(\vec{f}^{(p)}(t_0), \vec{f}^{(q)}(t_0)) \neq 0$ .

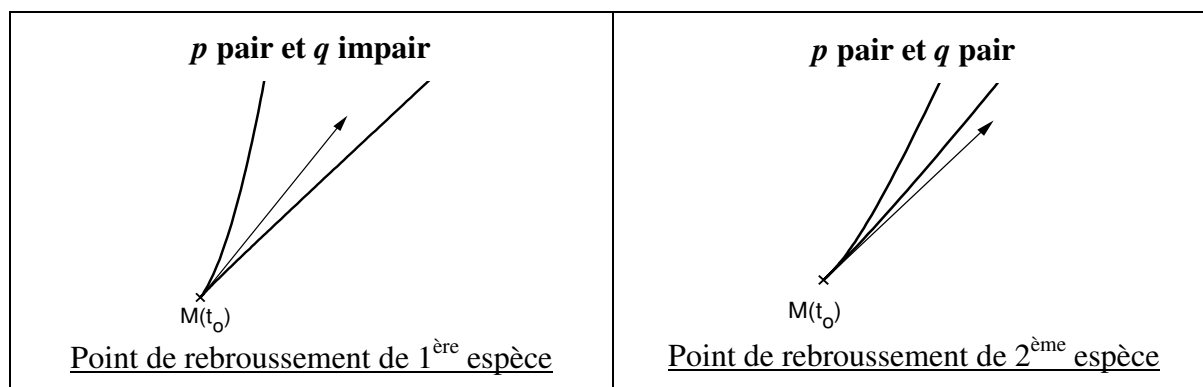
#### b. Cas d'un point régulier :

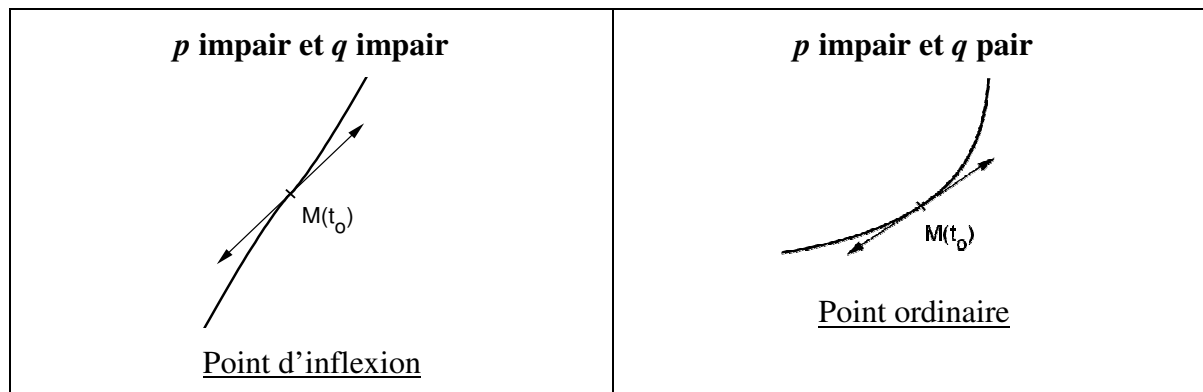
La courbe admet une tangente dirigée par  $\vec{f}'(t_0)$ .



#### c. Cas d'un point stationnaire :

La courbe admet une tangente dirigée par  $\vec{f}^{(p)}(t_0)$ .





### III-4. Longueur d'un arc paramétré

Définition :

Si  $t \mapsto \vec{f}(t)$  est de classe  $C^1$ , la longueur de l'arc associé à  $\vec{f}$  entre  $t = t_1$  et  $t = t_2$  avec  $t_1 \leq t_2$  est le réel :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{f}'(u)\| du .$$