Corrigé du DM n° 1

Partie I.A

Q1. Les ensembles $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cours de 1ère année).

De plus, le produit de deux matrices triangulaires supérieures (strictes) est une matrice triangulaire supérieure (stricte), donc $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont stables par produit (cours de 1ère année).

Ainsi :

$$\boxed{T_n(\mathbb{K}) \text{ et } T_n^+(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Q2. $S_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cours de 1ère année).

Posons $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

On a $A,B\in S_2(\mathbb{K})$, mais $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\notin S_2(\mathbb{K})$, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit et ainsi :

$$\boxed{S_2(\mathbb{K}) \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

On a $C\in\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$ (et même $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})=\mathrm{Vect}(C)$), mais $C^2=-I_2\notin\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$, donc $\mathcal{A}_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit et ainsi :

$$\boxed{\mathcal{A}_2(\mathbb{K}) \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

Q3. On reprend les matrice A, B et C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ définies ci-dessus et on pose :

$$A'=\begin{pmatrix}A&0_{2,n-2}\\0_{n-2,2}&I_{n-2}\end{pmatrix},\ B'=\begin{pmatrix}B&0_{2,n-2}\\0_{n-2,2}&I_{n-2}\end{pmatrix}\text{ et } C'=\begin{pmatrix}C&0_{2,n-2}\\0_{n-2,2}&0_{n-2}\end{pmatrix}.$$

On a $A',B'\in S_n(\mathbb{K})$ et $C'\in\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, mais $A'B'\notin S_n(\mathbb{K})$ et $C'^2\notin\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, donc $S_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables par produit et :

$$\boxed{S_n(\mathbb{K}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \text{ ne sont pas des sous-algèbres de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Partie I.B

Q4. On a $\mathscr{A}_F=\{u\in\mathcal{L}(E)\setminus u(F)\subset F\}$. Soient $u,v\in\mathscr{A}_F$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$. On a $u(F)\subset F$ et $v(F)\subset F$. Alors :

- pour tout $x\in F$, $u(x)\in F$ et $v(x)\in F$ donc $(\lambda u+\mu v)(x)=\lambda u(x)+\mu v(x)\in F$, soit $(\lambda u+\mu v)(F)\subset F$; comme $\lambda u+\mu v\in\mathcal{L}(E)$, on a $\lambda u+\mu v\in\mathscr{A}_F$ donc $\mathscr{A}_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$;
- $u(F)\subset F$ donc $v\circ u(F)\subset v(F)\subset F$ et comme $v\circ u\in\mathcal{L}(E)$, on a $v\circ u\in\mathscr{A}_F$ donc $\mathscr{A}_F$ est stable par produit (composition ici).

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{A}_F \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{L}(E).}$$

Q5. Soit $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de *F*, que l'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de *E*.

Pour tout $u \in \mathcal{A}_F$, posons $M_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{p,j}e_p + a_{p+1,j}e_{p+1} + \dots + a_{n,j}e_n$.

Comme *F* est stable par *u*, si $j \in [\![1, p]\!]$, alors $e_j \in F$, donc $u(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{p,j}e_p$ et $a_{p+1,j} = \dots = a_{n,j} = 0$.

Ainsi, il existe $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $A_3 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$:

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_3 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $M_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme ci-dessus, alors pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = a_{1,j}e_1 + \dots + a_{p,j}e_p \in F$, donc *F* est stable par *u* et $u \in \mathcal{A}_F$.

On a alors $\dim \mathcal{A}_F = \dim \mathcal{F}$ avec :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), A_3 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\}.$$

Or, $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (via $(A_1, A_2, A_3) \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-p,p} & A_3 \end{pmatrix}$), donc :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A}_F &= \dim\left(\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})\right) \\ &= \dim \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \\ &= p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_F = n^2 - np + p^2}$$

Q6. Posons $f(x) = n^2 - nx + x^2$ sur $[1, n-1]$.

La fonction *f* est polynomiale, donc dérivable sur $[1, n-1]$ avec $f'(x) = 2x - n = 2\left(x - \frac{n}{2}\right)$.

Avec $\frac{n}{2} \in [1, n-1]$ (pour $n \geq 2$), on a :

- sur $\left[1, \frac{n}{2}\right]$, $f'(x) \leq 0$, donc *f* est décroissante de $f(1) = n^2 - n + 1$ à $f\left(\frac{n}{2}\right)$;
- sur $\left[\frac{n}{2}, n-1\right]$, $f'(x) \geq 0$, donc *f* est croissante de $f\left(\frac{n}{2}\right)$ à $f(n-1) = n^2 - n + 1$.

Finalement, le maximum de *f* sur $[1, n-1]$ est $f(1) = f(n-1) = n^2 - n + 1$, donc :

$$\boxed{\max_{1 \leq p \leq n-1} \left(n^2 - np + p^2\right) = n^2 - n + 1}$$

Partie I.C

Q7. En posant comme plus haut $C=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, on a :

$$\Gamma(\mathbb{K})=\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\setminus(a,b)\in\mathbb{K}^2\right\}=\left\{aI_2+bC\setminus(a,b)\in\mathbb{K}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(I_2,C\right).$$

Donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Pour tout $(a,b,a',b')\in\mathbb{K}^4$, on a avec $C^2=-I_2$:

$$\begin{aligned}(aI_2+bC)(a'I_2+b'C)&=aa'I_2+ba'C+ab'C+bb'C^2\\&=aa'I_2+ba'C+ab'C-bb'I_2\\&=(aa'-bb')I_2+(ba'+ab')C\end{aligned}$$

Donc, $(aI_2+bC)(a'I_2+b'C)\in\Gamma(\mathbb{K})$ et $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit.

Finalement :

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{K})\text{ est une sous-algèbre de }\mathcal{M}_2(\mathbb{K}).}$$

Q8. Ici, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Si $\Gamma(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre diagonalisable, alors il existe $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M de $\Gamma(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est diagonale. En particulier, $P^{-1}CP$ est diagonale, soit $P^{-1}CP=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$ avec λ et μ réels. Si $P=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$, on a :

$$P^{-1}CP=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}\iff CP=P\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}-\gamma&-\delta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha&\mu\beta\\\lambda\gamma&\mu\delta\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-\gamma=\lambda\alpha\\-\delta=\mu\beta\\\alpha=\lambda\gamma\\\beta=\mu\delta\end{cases}\iff\begin{cases}(\lambda^2+1)\gamma=0\\(\mu^2+1)\delta=0\\\alpha=\lambda\gamma\\\beta=\mu\delta\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=0\\\delta=0\\\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$$

Soit finalement $P=0_2$, ce qui est absurde car P est inversible.

Ainsi, il n'existe pas de matrice $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que pour toute M de $\Gamma(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est diagonale, donc :

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{R})\text{ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de }\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Q9. Ici, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On reprend les calculs ci-dessus mais dans $\mathbb{C}$, en remarquant que $\lambda\neq\mu$ (car sinon on aurait $P^{-1}CP=\lambda I_2$, donc $C=\lambda I_2$ qui est absurde). On obtient alors :

$$\begin{cases}(\lambda^2+1)\gamma=0\\(\mu^2+1)\delta=0\\\alpha=\lambda\gamma\\\beta=\mu\delta\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=0\\\delta=0\\\alpha=0\\\beta=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}\lambda=i\\\mu=-i\\\alpha=i\gamma\\\beta=-i\delta\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}\lambda=-i\\\mu=i\\\alpha=-i\gamma\\\beta=i\delta\end{cases}$$

En choisissant $\lambda = i$, on obtient $P = \begin{pmatrix} \alpha & i\delta \\ i\alpha & \delta \end{pmatrix}$ (qui est inversible pour $\alpha \neq 0$ et $\delta \neq 0$ car $\det P = 2\alpha\delta$).

Avec cette matrice *P*, on a $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$:

$$P^{-1}(aI_2 + bC)P = aP^{-1}P + bP^{-1}CP = aI_2 + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}.$$

Donc, pour toute $M \in \Gamma(\mathbb{R})$, $P^{-1}MP$ est diagonale et ainsi :

$$\boxed{\Gamma(\mathbb{C}) \text{ est une sous-algèbre diagonalisable de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

Partie III.A

Q23. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on a $\langle A \mid B \rangle = Tr({}^tAB)$ avec $Tr\big((a_{i,j})\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

- Une matrice et sa transposée ayant les mêmes éléments diagonaux, on a $Tr({}^tM) = Tr(M)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc :
$$\langle B \mid A \rangle = Tr({}^tBA) = Tr\big({}^t({}^tBA)\big) = Tr\big({}^tA\,{}^t({}^tB)\big) = Tr({}^tAB) = \langle A \mid B \rangle.$$
Et $(A,B) \mapsto \langle A \mid B \rangle$ est symétrique.

- L'application $M \mapsto Tr(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \mapsto \langle A \mid B \rangle = Tr({}^tAB)$ est linéaire, donc $(A,B) \mapsto \langle A \mid B \rangle$ est linéaire à droite, donc bilinéaire avec la symétrie.

- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si ${}^tAA = (\alpha_{i,j})$, on a $\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$ donc :
$$\langle A \mid A \rangle = Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}{}^2 \geq 0.$$
Donc $(A,B) \mapsto \langle A \mid B \rangle$ est positive.

- Enfin, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\langle A \mid A \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}{}^2 = 0 \iff \forall\,(k,i) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,i} = 0 \iff A = 0_n.$$
Donc $(A,B) \mapsto \langle A \mid B \rangle$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{(A,B) \mapsto \langle A \mid B \rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q24. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui donne immédiatement :

$$\dim \mathcal{A} + \dim \mathcal{A}^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit :

$$\boxed{d + r = n^2}$$

Q25. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

($\Rightarrow$) Si $M \in \mathcal{A}$, alors pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, $\langle M \mid N \rangle = 0$.

En particulier, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $A_i \in \mathcal{A}^\perp$, donc $\langle M \mid A_i \rangle = 0$.

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle M \mid A_i \rangle = 0$.

Pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, on a $N = \sum_{i=1}^{r} a_i A_i$ (les a_i sont des réels) et :

$$\langle M \mid N \rangle = \left\langle M \mid \sum_{i=1}^{r} a_i A_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle M \mid A_i \rangle = 0.$$

Donc, $M \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp$ et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $(\mathcal{A}^\perp)^\perp = \mathcal{A}$, donc $M \in \mathcal{A}$.

Finalement :

$$\boxed{M \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, r]\!],\ \langle M \mid A_i \rangle = 0.}$$

Q26. Soit $N \in \mathcal{A}$.

On veut montrer que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, ${}^tNA_i \in \mathcal{A}^\perp$, c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathcal{A}$, $\langle M \mid {}^tNA_i \rangle = 0$.

Soient $i \in [\![1, r]\!]$ et $M \in \mathcal{A}$. On a :

$$\langle M \mid {}^tNA_i \rangle = Tr\left({}^tM\,{}^tNA_i\right) = Tr\left({}^t(NM)A_i\right) = \langle NM \mid A_i \rangle.$$

Or, $M, N \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc stable par produit. Ainsi, $NM \in \mathcal{A}$ et comme $A_i \in \mathcal{A}^\perp$:

$$\langle M \mid {}^tNA_i \rangle = \langle NM \mid A_i \rangle = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } N \in \mathcal{A} \text{ et tout } i \in [\![1, r]\!],\ {}^tNA_i \in \mathcal{A}^\perp.}$$

Partie III.B

Q27. On a $\mathcal{A}^\top = \{{}^tM \setminus M \in \mathcal{A}\}$, donc une matrice $M \in \mathcal{A}^\top$ si et seulement si ${}^tM \in \mathcal{A}$.

Soient $M, N \in \mathcal{A}^\top$. On a donc ${}^tM, {}^tN \in \mathcal{A}$ et :

- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ${}^t(\lambda M + \mu N) = \lambda\,{}^tM + \mu\,{}^tN \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), et ainsi $\lambda M + \mu N \in \mathcal{A}^\top$: $\mathcal{A}^\top$ est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM \in \mathcal{A}$ (car $\mathcal{A}$ est stable par produit), et ainsi $MN \in \mathcal{A}^\top$: $\mathcal{A}^\top$ est stable par produit.

Finalement, $\mathcal{A}^\top$ est un sous espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit, donc :

$$\boxed{\mathcal{A}^\top \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $(B_1,...,B_d)$ une base de $\mathcal{A}$.

Pour tout $M \in \mathcal{A}^{\top}$, on a ${}^tM \in \mathcal{A}$, donc ${}^tM = b_1B_1 + ... + b_dB_d$ (les b_i étant des réels). Alors :

$$M = {}^t(b_1B_1 + ... + b_dB_d) = b_1\,{}^tB_1 + ... + b_d\,{}^tB_d .$$

Ainsi, $({}^tB_1,...,{}^tB_d)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}^{\top}$.

De plus, si $b_1\,{}^tB_1 + ... + b_d\,{}^tB_d = 0_n$, alors ${}^t(b_1\,{}^tB_1 + ... + b_d\,{}^tB_d) = b_1B_1 + ... + b_dB_d = 0_n$ et donc $b_1 = ... = b_d = 0$ car $(B_1,...,B_d)$ est libre. Donc, $({}^tB_1,...,{}^tB_d)$ est libre aussi.

Finalement, $({}^tB_1,...,{}^tB_d)$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{A}^{\top}$, c'est une base de $\mathcal{A}^{\top}$. Comme elle contient *d* matrices :

$$\boxed{\dim \mathcal{A}^{\top} = d = \dim \mathcal{A}}$$

Q28. Soit $M \in \mathcal{A}^{\top}$. On veut montrer que *F* est stable par $Z \mapsto MZ$, autrement dit que pour tout $Z \in F$, ou encore que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $MA_kX \in F$.

Comme $M \in \mathcal{A}^{\top}$, on a ${}^tM \in \mathcal{A}$, donc, d'après la question 26, ${}^t({}^tM)A_k = MA_k \in \mathcal{A}^{\perp}$.

Il existe alors des réels $a_1, ..., a_r$ tels que $MA_k = \sum_{i=1}^{n} a_iA_i$, donc :

$$MA_kX = \sum_{i=1}^{n} a_iA_iX \in F .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } M \in \mathcal{A}^{\top}, F \text{ est stable par } Z \mapsto MZ .}$$

Q28. On vient de voir que pour tout $M \in \mathcal{A}^{\top}$, si on note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et v_M l'endomorphisme de *E* canoniquement associé à *M*, on a $v_M(F) \subset F$, donc $v_M \in \{u \in \mathcal{L}(E) \setminus u(F) \subset F\}$. Alors :

$$\{v_M \setminus M \in \mathcal{A}^{\top}\} \subset \{u \in \mathcal{L}(E) \setminus u(F) \subset F\}.$$

Or, $\{v_M \setminus M \in \mathcal{A}^{\top}\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $\mathcal{A}^{\top}$ (via l'isomorphisme canonique $M \mapsto v_M$), donc :

$$\dim\{v_M \setminus M \in \mathcal{A}^{\top}\} = \dim \mathcal{A}^{\top} \leq \dim\{u \in \mathcal{L}(E) \setminus u(F) \subset F\}.$$

De plus, d'après la question 5, $\dim\{u \in \mathcal{L}(E) \setminus u(F) \subset F\} = n^2 - n\dim F + (\dim F)^2$ et d'après la question 27, $\dim \mathcal{A}^{\top} = \dim \mathcal{A} = d$, donc :

$$d \leq n^2 - n\dim F + (\dim F)^2 .$$

Enfin, comme $F = \mathrm{Vect}(A_1X, ..., A_rX)$, on a $\dim F \leq r = n^2 - d$.

On a vu à la question 6 que si $\dim F \in [1, n-1]$, alors $n^2 - n\dim F + (\dim F)^2 \leq n^2 - n + 1$, donc $d \leq n^2 - n + 1$.

Et si $\dim F > n-1$, alors $n - 1 < \dim F \leq r = n^2 - d$, donc $d < n^2 - n + 1$.

Dans les deux cas, on obtient :

$$\boxed{d \leq n^2 - n + 1}$$

D'après la partie I.B, si F est une droite vectorielle de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\dim \mathscr{A}_F = n^2 - n + 1$.

Ainsi, on peut trouver une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, et donc de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - n + 1$ et finalement :

$$\boxed{\text{La dimension maximale une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est } n^2 - n + 1.}$$