Corrigé du DS n° 1

Problème n° 1

PRELIMINAIRES

1) Les fonctions $|f|$ et h sont réelles positives sur $[1,+\infty[$, donc $x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt$ et $x\mapsto\int_1^x h(t)dt$ sont croissantes sur $[1,+\infty[$. Comme $x\mapsto\int_1^x h(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$ que l'on notera *L*, on a $\int_1^x h(t)dt\le L$ pour tout $x\in[1,+\infty[$. Comme $|f(x)|\le h(x)$, on a pour tout $x\in[1,+\infty[$:

$$\int_1^x|f(t)|dt\le\int_1^x h(t)dt\le L.$$

Ainsi, $x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt$ est croissante et majorée par *L* sur $[1,+\infty[$, donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt\text{ admet une limite finie quand }x\to+\infty.}$$

2) On suppose dans un premier temps *f* réelle et on pose :

$$f_+:x\mapsto\begin{cases}f(x)=|f(x)| & \text{quand } f(x)\ge 0\\ 0 & \text{quand } f(x)<0\end{cases}\quad\text{et}\quad f_-:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{quand } f(x)\ge 0\\ -f(x)=|f(x)| & \text{quand } f(x)<0\end{cases}$$

On a pour tout $x\in[1,+\infty[$, $0\le f_+(x)\le|f(x)|$ et $0\le f_-(x)\le|f(x)|$. Comme $x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$, les fonctions $x\mapsto\int_1^x|f_+(t)|dt=\int_1^x f_+(t)dt$ et $x\mapsto\int_1^x|f_-(t)|dt=\int_1^x f_-(t)dt$ admettent une limite finie quand $x\to+\infty$.

Or, $f=f_++f_-$, donc pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\int_1^x f(t)dt=\int_1^x f_+(t)dt+\int_1^x f_-(t)dt$ et $x\mapsto\int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

On suppose maintenant que *f* est à valeurs complexes. Pour tout $x\in[1,+\infty[$, $|\mathrm{Re}(f(x))|\le|f(x)|$, donc, d'après la question 1, $x\mapsto\int_1^x|\mathrm{Re}(f(t))|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$ et d'après ce qui précède, $x\mapsto\int_1^x\mathrm{Re}(f(t))\,dt=\mathrm{Re}\left[\int_1^x f(t)dt\right]$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

On prouve de même que $x\mapsto\int_1^x\mathrm{Im}(f(t))\,dt=\mathrm{Im}\left[\int_1^x f(t)dt\right]$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$ et finalement, $x\mapsto\int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

Ainsi, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Si } x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt\text{ admet une limite finie quand }x\to+\infty\text{, alors }x\mapsto\int_1^x f(t)dt\text{ aussi.}}$$

3) a. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a, en intégrant par parties (on peut car *f* est de classe C^1) :

$$\begin{aligned} w_n &= \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) = \left[t\,f(t)\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} t\,f'(t)dt - f(n) \\ &= n\,f(n) - (n-1)\,f(n-1) - \int_{n-1}^{n} t\,f'(t)dt - f(n) = (n-1)\left[f(n) - f(n-1)\right] - \int_{n-1}^{n} t\,f'(t)dt \\ &= (n-1)\int_{n-1}^{n} f'(t)dt - \int_{n-1}^{n} t\,f'(t)dt \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\boxed{w_n = \int_{n-1}^{n} (n-1-t)\,f'(t)dt}$$

On a alors :

$$|w_n| = \left|\int_{n-1}^{n} (n-1-t)\,f'(t)dt\right| \leq \int_{n-1}^{n} \left|(n-1-t)\,f'(t)\right| dt = \int_{n-1}^{n} |n-1-t|\left|f'(t)\right| dt\,.$$

Or, pour tout $t \in [n-1, n]$, $|n-1-t| = t-(n-1) \leq 1$, donc :

$$\boxed{|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} \left|f'(t)\right| dt}$$

b. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \left|f'(t)\right| dt = \int_{1}^{n} \left|f'(t)\right| dt$. Or, $\displaystyle\int_{1}^{x} \left|f'(t)\right| dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, donc la série $\displaystyle\sum \int_{n-1}^{n} \left|f'(t)\right| dt$ converge et par comparaison, $\sum |w_n|$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum w_n \text{ est absolument convergente.}}$$

c. D'après ce qui précède, $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Or, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $f(n) = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - w_n$, ce qui permet de conclure immédiatement que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge. Enfin, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = \int_{1}^{n} f(t)dt$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge si et seulement si la suite } \left(\int_{1}^{n} f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

4) a. La fonction *f* est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}\right) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}\,.$$

Alors, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{|\cos\sqrt{x}\,|}{2x\sqrt{x}} + \dfrac{|\sin\sqrt{x}\,|}{x^2} \leq \dfrac{1}{2x^{3/2}} + \dfrac{1}{x^2}$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) = 2\,.$$

Donc, d'après la question 1 :

$$\boxed{x \mapsto \int_{1}^{x} \left|f'(t)\right| dt \text{ admet une limite finie quand } x \to +\infty\,.}$$

b. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, en posant le changement de variable $u=\sqrt{t}$ (soit $t=u^2$ et $dt=2udu$), on a :

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u^2}2udu = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u}du .$$

En intégrant par parties, on obtient alors :

$$\int_1^x f(t)dt = 2\left(\left[\frac{-\cos u}{u}\right]_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} -\frac{-\cos u}{u^2}du\right) = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2}du\right).$$

Ainsi, on a bien, pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\boxed{\int_1^x f(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u}du = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2}du\right)}$$

c. On a pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du \le \int_1^{\sqrt{x}} \frac{du}{u^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, donc, comme plus haut, on peut conclure que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

D'après la question 2, il en va de même pour $x \mapsto \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2}du$ et, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ admet, elle aussi, une limite finie quand $x \to +\infty$.

Ceci prouve que la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Or, d'après la question a, la fonction *f* vérifie les hypothèses de la question 3, ce qui permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n} \text{ converge.}}$$

Partie I

5) On a ici $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S \neq 0$. Comme $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{S_n}{n}$, on a :

$$v_n \sim \frac{S}{n}.$$

Or, la série harmonique diverge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

6) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{(-1)^n}{2\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$, soit, plus simplement :

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{quand } n \text{ est pair}\\ -\dfrac{1}{n+1} & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}$$

On a alors pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$S_{2p}=\sum_{k=1}^{2p}u_k=\sum_{k=1}^{p}u_{2k}+\sum_{k=1}^{p}u_{2k-1}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}=0.$$

Et :

$$S_{2p+1}=S_{2p}+u_{2p+1}=0-\frac{1}{2p+1+1}=-\frac{1}{2(p+1)}.$$

Donc, $\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p}=\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p+1}=0$, et ainsi :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S=0.}$$

D'après ce qui précède :

$$v_n=\frac{S_n}{n}=\begin{cases}0 & \text{quand } n \text{ est pair}\\ -\dfrac{1}{n(n+1)} & \text{quand } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Comme $\dfrac{1}{n(n+1)}\sim\dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann converge, la série $\sum\left(-\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ converge et donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

7) On procède comme ci-dessus. On a pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases}u_{2p}=\dfrac{1}{\ln(p+1)}\\ u_{2p-1}=-\dfrac{1}{\ln(p+1)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S_{2p}=0\\ S_{2p-1}=-\dfrac{1}{\ln(p+1)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{2p}=0\\ v_{2p-1}=-\dfrac{1}{(2p-1)\ln(p+1)}\end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p}=\lim\limits_{p\to+\infty}S_{2p-1}=0$, d'où :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S=0.}$$

Comme $v_{2p-1}\sim-\dfrac{1}{2p\ln p}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n\ln n}$ diverge (par comparaison série-intégrale) :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

8) Dans les deux questions précédentes, on a $S=0$ et une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

$$\boxed{\text{Quand } S=0\text{, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série } \sum v_n\,.}$$

PARTIE II

9) Si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, S_n et donc v_n sont de signe constant à partir d'un certain rang (positif si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$, négatif si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\infty$).

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}|S_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}|n\,v_n|=+\infty$, donc $\dfrac{1}{n}=o(v_n)$. Comme la série harmonique diverge :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

PARTIE III

10) Ici, $u_n=(-1)^n$. La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=(-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{(-1)^n-1}{2}\,.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{(-1)^n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{n}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}$. La série $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série harmonique $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

11) Ici, $u_1=-1$ et, pour $n\geq 2$, $u_n=2(-1)^n$.

La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geq 2$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=-1+2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k=-1+2(-1)^2\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}=(-1)^n\,.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

12) Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

$$\boxed{\text{Quand la série } \sum u_n \text{ diverge grossièrement et que } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série } \sum v_n.}$$

PARTIE IV

13) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1}) \\ &= 2\sin\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $|u_n| \le 2\left|\sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right)\right|$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right) = \sin 0 = 0$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

De plus, on a par télescopage, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin(\sqrt{k}) - \sin(\sqrt{k-1})\right) = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{0}) = \sin(\sqrt{n}).$$

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n^2} = \sin n$, donc, d'après le résultat rappelé dans l'énoncé, $(S_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

Or, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admettait une limite, toute suite extraite aurait la même limite, y compris $(S_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ et, d'après la question les préliminaires, la série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

14) Comme la suite u est la même que celle de la question précédente en dehors de son premier terme, sa limite est toujours 0. De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1 + \sin(\sqrt{n})$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a ici $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1+\sin(\sqrt{n})}{n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$. Comme $\sum\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge et $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

15) Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

> Quand la série $\sum u_n$ diverge, mais pas grossièrement, et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum v_n$.

CONCLUSION

16) Dans les quatre parties précédentes, nous avons passé en revue tous les comportements possibles pour la série $\sum u_n$: convergence, divergence vers l'infini ou absence de limite pour la somme partielle.

En définitive, on peut conclure quant à la nature de $\sum v_n$ uniquement dans le cas où la somme partielle S_n de la suite u admet une limite non nulle (finie ou infinie).

Problème n° 2

1) On a $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, donc si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge (car les séries sont positives) et, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N$:

$$(1-\varepsilon)a_n\leq b_n\leq(1+\varepsilon)a_n .$$

On a donc, pour tout entier $n\geq N$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-\varepsilon)a_k=(1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}b_k\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1+\varepsilon)a_k=(1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k .$$

Soit :

$$(1-\varepsilon)R_n(a)\leq R_n(b)\leq(1+\varepsilon)R_n(a) .$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{R_n(a)\underset{n\to+\infty}{\sim}R_n(b)}$$

On a alors :

$$R_n(a)=S(a)-S_n(b)=R_n(b)+\underset{n\to+\infty}{o}\big(R_n(b)\big) .$$

Soit :

$$\boxed{S_n(b)=S(a)-R_n(b)+\underset{n\to+\infty}{o}\big(R_n(b)\big)}$$

2) Comme les séries sont positives, si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge avec :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = \lim_{n\to+\infty} S_n(b) = +\infty.$$

Comme ci-dessus, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $S_n(a) > 0$ et :

$$(1-\varepsilon)a_n \leq b_n \leq (1+\varepsilon)a_n.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq N+1$:

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=N+1}^{n} b_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n} a_k \quad \Leftrightarrow \quad (1-\varepsilon)\left[S_n(a)-S_N(a)\right] \leq S_n(b)-S_N(b) \leq (1+\varepsilon)\left[S_n(a)-S_N(a)\right].$$

Soit :

$$-\varepsilon + \frac{S_N(b)-(1-\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} \leq \frac{S_n(b)}{S_n(a)} - 1 \leq \varepsilon + \frac{S_N(b)-(1+\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_N(b)-(1-\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_N(b)-(1+\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} = 0$ (car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(a) = +\infty$), donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N'$, $-\varepsilon \leq \dfrac{S_N(b)-(1-\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)}$ et $\dfrac{S_N(b)-(1+\varepsilon)S_N(a)}{S_n(a)} \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq \max\left(N+1, N'\right)$, on a $-2\varepsilon \leq \dfrac{S_n(b)}{S_n(a)} - 1 \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(b)}{S_n(a)} = 1$ et donc que :

$$\boxed{S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(b)}$$

3) Soit un entier $p \geq 2$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)}$.

On a $\dfrac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ et comme $p \geq 2$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^p}$ converge. Alors, d'après la question 1, $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-2)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-2)(n+p-1)} = \frac{(n+p-1)-n}{n(n+1)\dots(n+p-2)(n+p-1)} = (p-1)u_n.$$

Donc, on a par télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-2)} - \frac{1}{(k+1)\dots(k+p-2)(k+p-1)}\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-2)} - \frac{1}{(k+1)\dots(k+p-2)(k+p-1)}\right) \\
&= \frac{1}{p-1}\frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)}
\end{aligned}$$

Et comme $\dfrac{1}{(n+1)...(n+p-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{p-1}}$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}$ et finalement :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p-1}\frac{1}{n^{p-1}}}$$

4) a. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln n - \dfrac{1}{2n}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - \frac{1}{2(n+1)} - H_n + \ln n + \frac{1}{2n} \\
&= H_{n+1} - H_n - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \frac{1}{2n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}$ et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. De plus, d'après la question 1, on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}.$$

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n}^{N} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{N\to+\infty} \left(u_{N+1} - u_n\right) = \gamma - u_n$ et d'après la question précédente :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Donc :

$$\gamma - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

Finalement, on a $\gamma - u_n = \gamma - H_n + \ln n + \dfrac{1}{2n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, soit :

$$\boxed{u_n = H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

b. On vient de voir que $\gamma - u_n = \gamma - H_n + \ln n + \dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$, soit $\gamma - H_n + \ln n + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, soit :

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

5) On veut prouver que $n! = \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left[1 + \dfrac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$. Comme tout est strictement positif, cela revient à prouver que :

$$\ln(n!) = \ln\delta + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\left[1 + \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \ln\delta + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n.$$

On a :

$$v_{n+1} - v_n = \ln(n+1) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) + 1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = -\frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons $V = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

De plus, on a $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$, donc, d'après la question 1 :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{N\to+\infty} v_{N+1} - v_n = V - v_n$ et, d'après la question 3, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, d'où :

$$V - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n}.$$

Soit $v_n = \ln(n!) - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n + n = V + \dfrac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, qui se récrit :

$$\ln(n!) = V + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) = V + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\left[1 + \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Enfin, en posant $\delta = e^V$, on obtient :

$$\boxed{n! = \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left[1 + \frac{1}{12n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]}$$

La formule ci-dessus implique que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ et la formule de Stirling donne :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Donc :

$$\boxed{\delta = \sqrt{2\pi}}$$