

Corrigés des TD du chapitre 4
Exercice 1

On pose $f_n(t) = (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie et continue sur $[0,1]$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto (t^2 + 1)e^t$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, on a :

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t} - (t^2 + 1)e^t \right| = \left| (t^2 + 1) \frac{2t \operatorname{sh} t}{n+t} \right| \leq \frac{2(t^2 + 1)t \operatorname{sh} t}{n} \leq \frac{4 \operatorname{sh} 1}{n}.$$

Donc $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{4 \operatorname{sh} 1}{n}$ et, comme $\frac{4 \operatorname{sh} 1}{n} \rightarrow 0$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^1 f_n(t) dt \right] = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n(t)] dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t^2 + 1)e^t dt &= \left[(t^2 + 1)e^t \right]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt = \left[(t^2 + 1)e^t \right]_0^1 - \left[2te^t \right]_0^1 + \int_0^1 2e^t dt \\ &= \left[(t^2 + 1)e^t - 2te^t + 2e^t \right]_0^1 = \left[(t^2 - 2t + 3)e^t \right]_0^1 = 2e - 3 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^1 (t^2 + 1) \frac{ne^t + te^{-t}}{n+t} dt \right] = 2e - 3$$

Exercice 2

1) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f_x(t) = t^3 + xt - 1$.

Sur \mathbb{R} , la fonction f_x est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, f_x réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Ainsi, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f_x , ce qui veut dire que :

L'équation $(E_{x,n})$ admet une unique solution réelle.

Remarquons que $f_x(0) = -1 < \frac{1}{n} = f_x(u_n(x))$, donc $u_n(x) > 0$ car f_x est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^3 + xu_n(x) - 1 - \frac{1}{n} = 0 \iff f_x(u_n(x)) = \frac{1}{n} \iff u_n(x) = f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme f_x est continue sur \mathbb{R} , f_x^{-1} l'est aussi et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} f_x^{-1}(t) = f_x^{-1}(0).$$

Et on a $f_x(t) = t^3 + xt - 1 = 0$ quand $t = f_x^{-1}(0)$, donc $f_x^{-1}(0)$ est l'unique solution de $t^3 + xt - 1 = 0$.

Finalement :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction u telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$.

On a $f_x(u(x)) = 0$. Or, la fonction f_x est strictement croissante et $f_x(0) = -1 < 0$, donc $u(x) > 0$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, soit :

$$x = \frac{1 - u(x)^3}{u(x)} = \frac{1}{u(x)} - u(x)^2 = g(u(x))$$

avec $g(t) = \frac{1}{t} - t^2$.

La fonction g est continue sur \mathbb{R}_+^* et strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} . Alors :

$$g(u(x)) = x \Leftrightarrow u(x) = g^{-1}(x).$$

La fonction g étant continue et strictement décroissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , le théorème de la bijection continue assure que la fonction g^{-1} est continue et strictement décroissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* . Ainsi :

La fonction u est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Remarquons que $g(1) = 0$, donc $g^{-1}(0) = 1$ et $\lim_{0^+} g = +\infty$, donc $\lim_{+\infty} g^{-1} = 0$.

Ainsi, sur \mathbb{R}_+ , g^{-1} est strictement décroissante de 1 à 0, d'où :

$$u(0) = 1 \text{ et } \lim_{+\infty} u = 0.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x)^3 + xu_n(x) - 1 = \frac{1}{n}$ et $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, donc :

$$u_n(x)^3 - u(x)^3 + xu_n(x) - xu(x) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow [u_n(x) - u(x)][u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x] = \frac{1}{n}.$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x) > 0$ et $u(x) > 0$, donc :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > u(x)^2 + x$$

Sur \mathbb{R}_+ , la fonction $h : x \mapsto u(x)^2 + x$ est continue (somme de telle fonctions), strictement positive (car u l'est) et telle que $h(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} h = +\infty$. Ceci permet de conclure que h admet un minimum $\mu > 0$ et ainsi, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > \mu \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < k = \frac{1}{\mu}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|u_n(x) - u(x)| = \frac{1}{n} \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < \frac{k}{n}.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\|u_n - u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x) - u(x)| \leq \frac{k}{n}.$$

Enfin, comme $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$ et donc :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers u .

Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on a $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t) dt$, donc f_{n+1} est définie sur $[0, 1]$ si l'on peut intégrer f_n sur ce segment, et ceci est le cas, quand f_n est continue sur $[0, 1]$.

Si cela est vrai, alors $F_n : x \mapsto \int_0^x f_n(t) dt$ est elle aussi continue sur $[0, 1]$ (et même de classe C^1), donc f_{n+1} est continue sur $[0, 1]$.

Comme $f_0 = \varphi$ est continue sur $[0, 1]$, nous avons prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie et continue sur $[0, 1]$:

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f , alors f est continue sur $[0, 1]$ (car toutes les fonctions f_n le sont), $f_{n+1} \rightarrow f$ quand $n \rightarrow +\infty$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, x]$, donc $\int_0^x f_n(t) dt \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans la relation de récurrence, on obtient alors pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t) dt.$$

Ceci prouve immédiatement que $f(0) = 1$ et f est de classe C^1 sur $[0, 1]$ avec $f' = f$ et ainsi :

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément, c'est vers la fonction exponentielle.

3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $M_n(x) = \sup_{[0, x]} |f_n(t) - e^t| = \max_{[0, x]} |f_n(t) - e^t|$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$|f_{n+1}(x) - e^x| = \left| 1 + \int_0^x [f_n(t) - e^t + e^t] dt - e^x \right| = \left| \int_0^x [f_n(t) - e^t] dt + \int_0^x e^t dt - e^x + 1 \right| = \left| \int_0^x [f_n(t) - e^t] dt \right|.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$\forall t \in [0, x], |f_{n+1}(t) - e^t| \leq \int_0^t |f_n(u) - e^u| dt \leq \int_0^x |f_n(u) - e^u| dt \leq \int_0^x M_n(x) dt = x M_n(x) \Rightarrow M_{n+1}(x) \leq x M_n(x).$$

Une récurrence immédiate permet alors de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$M_n(x) \leq x^n M_0(x).$$

Et :

$$M_0(x) = \max_{[0,x]} |f_0(t) - e^t| = \max_{[0,x]} |\varphi(t) - e^t| \leq \max_{[0,1]} |\varphi(t) - e^t| = k.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq M_n(x) \leq kx^n$.

Comme pour tout $x \in [0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} kx^n = 0$, on obtient par le théorème des gendarmes :

$$\forall x \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x.$$

Remarquons que ceci prouve aussi que :

Pour tout $a \in [0, 1[$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers la fonction exponentielle.

Reste à montrer la convergence simple pour $x = 1$, c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = e$.

D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq M_{n+1}(1) \leq M_n(1)$$

avec $M_n(1) = \sup_{[0,1]} |f_n(t) - e^t| = \|f_n - \exp\|_\infty$ (sur $[0, 1]$).

Ainsi, la suite $(M_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel $M \geq 0$.

Toujours d'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_{n+1}(1) - e| = \left| \int_0^1 [f_n(t) - e^t] dt \right| = \left| \int_0^{1-\varepsilon} [f_n(t) - e^t] dt + \int_{1-\varepsilon}^1 [f_n(t) - e^t] dt \right|.$$

Donc :

$$|f_{n+1}(1) - e| \leq \int_0^{1-\varepsilon} |f_n(t) - e^t| dt + \int_{1-\varepsilon}^1 |f_n(t) - e^t| dt \leq (1-\varepsilon)M_n(1-\varepsilon) + \varepsilon M_n(1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(1-\varepsilon) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(1) = M$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} [(1-\varepsilon)M_n(1-\varepsilon) + \varepsilon M_n(1)] = \varepsilon M$ et donc, à partir d'un certain rang, on a $|f_{n+1}(1) - e| \leq (M+1)\varepsilon$ (avec $M+1 > 0$). Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, on en conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = e$$

Finalemnt :

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction exponentielle.

Exercice 4

1) Pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\zeta(x)$ est la somme d'une série de Riemann convergente, donc est bien défini.

De plus, pour tout $a \in]1; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sup_{x \in [a; +\infty[} \left| \frac{1}{n^x} \right| = \frac{1}{n^a}$ et $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (car $a > 1$).

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a; +\infty[$, et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ est continue sur cet intervalle, la fonction ζ est continue sur $[a; +\infty[$.

Ainsi, ζ est définie et continue sur $[a; +\infty[$ pour tout $a \in]1; +\infty[$, donc :

ζ est définie et continue sur $]1; +\infty[$.

2) Soient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ et $a \in]1; +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ (comme composée de fonctions de classe C^∞) et pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1; +\infty[$:

$$f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-x \ln n} = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Alors, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n^{(k)}(x)| = \frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

On peut écrire $\frac{(\ln n)^k}{n^a} = \frac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ et comme $\frac{a-1}{2} > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} = 0$ et donc :

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n^{(k)}(x)| = o\left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\right).$$

Comme $a > 1$, on a $\frac{a+1}{2} > 1$, et donc la série $\sum \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ converge, ce qui prouve que $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a; +\infty[$ et ainsi, ζ est de classe C^∞ sur $[a; +\infty[$.

Comme ceci est vrai pour tout $a \in]1; +\infty[$:

ζ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]1; +\infty[$, $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$.

3) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\zeta'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^x} = - \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^x} < 0.$$

Ainsi, ζ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Par ailleurs, $\sum \frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[2; +\infty[$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 1.$$

Enfin, pour tout $x \in]1; +\infty[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} e^{-(x-1) \ln n}.$$

Or, pour tout $h \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-h} \geq 1 - h$, donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} e^{-(x-1)\ln n} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (1 - (x-1)\ln n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - (x-1) \sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, pour tout réel $A > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n} > A$ et :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} > \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^x} > A - (x-1) \sum_{n=1}^{N_0} \frac{\ln n}{n}.$$

Alors, si ζ admet une limite finie ℓ en 1, l'inégalité ci-dessus donne $\ell \geq A$ en passant à la limite quand $x \rightarrow 1$.

Ainsi, on aurait $\ell \geq A$ pour tout réel $A > 0$, ce qui est absurde, et donc comme ζ est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$, on a $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$.

On obtient le tableau :

x	1	$+\infty$
ζ	$+\infty$	1

4) D'après ce qui précède, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est absolument convergente pour tout $x \in]1; +\infty[$, donc :

La fonction τ est bien définie sur $]1; +\infty[$.

On a pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} \\ &= \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} - 2 \frac{1}{2^x} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

Soit pour tout $x \in]1; +\infty[$:

$$\tau(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) \zeta(x)$$

5) La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{2^{x-1}}$ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$, donc, en tant que produit de telles fonctions :

La fonction τ est de classe C^∞ sur $]1; +\infty[$.

6) La série alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et sa somme est $\ln 2$ (obtenue avec la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1).

De plus, d'après le théorème sur les séries alternées, on a pour tout $x \in [1; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ceci prouve que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[1; +\infty[$ et comme les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sont toutes continues (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$), la fonction $x \mapsto \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et donc, τ est prolongeable par continuité en 1, avec $\lim_{x \rightarrow 1} \tau(x) = \ln 2$.

Alors :

$$\zeta(x) = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1} \tau(x) = \frac{2^{x-1}}{e^{(x-1)\ln 2} - 1} \tau(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)\ln 2} \ln 2.$$

Soit :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

On a vu plus haut que pour tout $x \in [1; +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \tau(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$.

En particulier, pour $n = 1$, on obtient pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$|\tau(x) - 1| \leq \frac{1}{2^x}.$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) = 1$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tau(x)}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1}$$

Exercice 5

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+^* (et \mathbb{R}_-^*).

Soit $x > 0$ fixé.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{x^2 + t^2}$ est décroissante, continue et positive sur \mathbb{R}_+ . On peut donc appliquer la comparaison série-intégrale, qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n+1} \frac{dt}{x^2 + t^2} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{x^2 + k^2} \leq \frac{1}{x^2} + \int_0^n \frac{dt}{x^2 + t^2}.$$

Or :

$$\int_0^n \frac{dt}{x^2+t^2} = \frac{1}{x} \int_0^n \frac{\frac{1}{x} dt}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} = \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x} \arctan\left(\frac{n+1}{x}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

Et en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2x} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{\pi}{2x} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2} \leq \frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

On a alors immédiatement par le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+k^2} \right] = \frac{\pi}{2}$, soit :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{x^2+n^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$$

Exercice 6

1) Une étude rapide de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$, montre que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

Alors, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{4^n}.$$

Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{4^n}$ converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge normalement sur } [0,1].}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$. On intègre par parties :

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} (1-t)^n \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} n(1-t)^{n-1} dt = \frac{n}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} (1-t)^{n-1} dt.$$

En recommençant plusieurs fois de suite, on obtient :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 t^{n+2} (1-t)^{n-2} dt = \dots = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \int_0^1 t^{n+k} (1-t)^{n-k} dt \dots = \frac{n(n-1)\dots(1)}{(n+1)(n+2)\dots(2n)} \int_0^1 t^{2n} dt.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la relation reste vraie pour $n=0$) :

$$\boxed{I_n = \frac{n! \times n!}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1) \binom{2n}{n}}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est polynômiale, donc continue sur $[0,1]$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc la série $\sum I_n$ converge avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n (1-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [t(1-t)]^n = \frac{1}{1-t(1-t)} = \frac{1}{t^2 - t + 1}.$$

Et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement, avec $I_n = \frac{1}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$:

La série $\sum \frac{1}{(2n+1) \binom{2n}{n}}$ converge avec $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1) \binom{2n}{n}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ (elle est définie sur \mathbb{R}_+ et rationnelle) et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+n^2x)^2} > 0.$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur \mathbb{R}_+ de $f_n(0) = 0$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^3 x} = \frac{1}{n^3}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n^3}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge :

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+.$$

2) Comme les fonctions f_n sont toutes continues sur \mathbb{R}_+ et $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ :

$$S = \sum_{n \geq 1} f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu que la fonction f_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+ et, on a de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{k+1} n^{2(k-1)} k!}{(1+n^2x)^{k+1}}.$$

Ici, on a immédiatement $\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n^{(k)}| = |f_n'(0)| = n^{2k-3} k!$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^{2k-3}}$ diverge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il n'y a pas de convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur \mathbb{R}_+ .

Par contre, pour tout réel $a > 0$, on a $\sup_{[a, +\infty[} |f_n^{(k)}| = |f_n^{(k)}(a)| = \frac{n^{2k-3} k!}{(1+n^2a)^{k+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k!}{n^5 a^{k+1}}$.

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^5}$ converge, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et donc, pour tout réel $a > 0$, S est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$.

Ceci permet de conclure que :

$$S \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, donc $S(0) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{S(x) - S(0)}{x} = \frac{S(x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n(x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1+n^2x)}.$$

Par comparaison série-intégrale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1+k^2x)} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t(1+t^2x)}$$

Et :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t(1+t^2x)} \underset{u=t^2x}{=} \frac{1}{2} \int_x^{(n+1)^2x} \frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{2} \int_x^{(n+1)^2x} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x} \right) - \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \right].$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x} = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n+1} \frac{dt}{t(1+t^2x)} = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1+n^2x)} \geq -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \Rightarrow \frac{S(x) - S(0)}{x} \geq -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right).$$

Enfin, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) \right] = +\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x) - S(0)}{x} = +\infty.$$

Ceci prouve que :

$$S \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

3) On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{n^3}$ et que la série $\sum f_n$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ .

On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}.$$

Et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} = \zeta(3)$ où ζ est la fonction de l'exercice 4 (on a $\zeta(3) \approx 1,2$), donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \zeta(3)$$

Exercice 8

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est définie sur \mathbb{R}_+^* et $u_n(t) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^n \ln t}{\ln n}$.

Si $t \in]0,1[$, alors $u_n(t) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum u_n(t)$ converge et si $t \in]1, +\infty[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = +\infty$, donc

$\sum u_n(t)$ diverge grossièrement. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = 0$, donc $\sum u_n(1)$ converge (et vaut 0).

Finalement :

La fonction S est définie sur $]0,1]$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $]0,1]$ avec pour tout $t \in]0,1]$:

$$u_n'(t) = \frac{nt^{n-1} \ln t + t^{n-1}}{H_n} = \frac{nt^{n-1}}{H_n} \left(\ln t + \frac{1}{n} \right).$$

On a alors le tableau :

t	0	$e^{-1/n}$	1
u_n	0	$u_n(e^{-1/n})$	0

$$\text{Donc, } \sup_{]0,1]} |u_n| = |u_n(e^{-1/n})| = \frac{1}{enH_n}.$$

Or, $\frac{1}{enH_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{en \ln n}$ et la série $\sum \frac{1}{en \ln n}$ diverge (s'obtient par comparaison série-intégrale avec

$\int^n \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$), donc $\sum \sup_{]0,1]} |u_n|$ et S ne converge pas normalement sur $]0,1]$.

Par contre, la suite $(e^{-1/n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ croit vers 1, donc pour tout $a \in]0,1[$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $a < e^{-1/n}$ et dans ce cas, on a $\sup_{]0,a]} |u_n| = |u_n(a) - u_n(a)|$. Comme la série $\sum u_n(a)$ converge, S converge normalement sur $]0,a]$ et finalement :

S converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0,a]$ avec $a \in]0,1[$, mais pas sur $]0,1[$.

3) Les fonctions u_n est de classe C^1 sur $]0,1]$, donc continues et comme S converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0,a]$ avec $a \in]0,1[$, elle est continue sur $]0,1[$.

De plus, $S(1) = 0$ et pour tout $t \in]0,1[$:

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{H_n} = \ln t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} = \frac{\ln t}{t-1} (t-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} = \frac{\ln t}{t-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t-1)t^n}{H_n} = \frac{\ln t}{t-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+1} - t^n}{H_n}.$$

Et comme sur $]0,1[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{t^n}{H_n} \leq t^n$ et $\sum t^n$ converge, la série $\sum \frac{t^n}{H_n}$ converge, donc :

$$S(t) = \frac{\ln t}{t-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{H_n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} \right) = \frac{\ln t}{t-1} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{H_{n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} \right) = \frac{\ln t}{t-1} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) t^n - t \right].$$

On a $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$, donc, si la limite existe, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 1} S(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) t^n \right] - 1.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) t^n \right| \leq \frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n}$. Or, la série $\sum \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right)$ converge (télescopage) et a

pour somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) = \frac{1}{H_1} = 1$, donc $\sum \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) t^n$ converge uniformément sur $]0,1[$.

Comme $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) t^n = \frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) t^n \right] = \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) t^n \right] = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n} \right) = 1.$$

Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 1} S(t) = 1 - 1 = 0 = S(1)$, donc S est continue en 1 et donc :

S est continue sur $]0,1]$.

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $]0,1]$, avec de plus :

$$u_n'(t) = \frac{nt^{n-1} \ln t + t^{n-1}}{H_n} = \frac{t^{n-1} (n \ln t + 1)}{H_n}.$$

On prouve, comme pour les u_n , que la série $\sum u_n'(t)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0,a]$ avec $a \in]0,1[$, donc que S est de classe C^1 sur $]0,1[$.

Par contre, on a pour tout $t \in]0,1[$:

$$\frac{S(t) - S(1)}{t-1} = \frac{1}{t-1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \frac{\ln t}{t-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n}.$$

Avec toujours $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1$, $t \mapsto \frac{S(t) - S(1)}{t-1}$ admet une limite en 1 si et seulement si $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n}$ en admet une.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_n \leq n$, donc pour tout $t \in]0,1[$, $\frac{t^n}{n} \leq \frac{t^n}{H_n}$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n}.$$

Comme $\lim_{t \rightarrow 1} [-\ln(1-t)] = +\infty$, on a par comparaison $\lim_{t \rightarrow 1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{H_n} \right] = +\infty$ et donc $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{S(t) - S(1)}{t-1} = +\infty$. Ceci prouve que S n'est pas dérivable en 1 et finalement :

S est dérivable sur $]0,1[$ (et même de classe C^1), mais pas en 1.

Exercice 9

1) Soit $x \mapsto a$ une éventuelle solution constante sur \mathbb{R} de (E) . On a alors :

$$a = 2a - 2a^2 \Leftrightarrow (2a-1)a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } \frac{1}{2}.$$

Réciproquement, on vérifie que la fonction nulle et $x \mapsto \frac{1}{2}$ sont bien des solutions (constantes) de (E) , donc :

Les solutions constantes sur \mathbb{R} sont la fonction nulle et $x \mapsto \frac{1}{2}$.

2) La fonction $f : x \mapsto xh(x)$ est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2xh(2x) = 2xh(x) - 2x^2h(x)^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, h(2x) = h(x) - xh(x)^2 \end{aligned}$$

En 0, la dernière relation est toujours vraie, donc :

f est solution de (E) sur \mathbb{R} si et seulement si $h(2x) = h(x) - xh(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Soient $t, t' \in [0,1]$, on a :

$$T_x(t) - T_x(t') = t - \frac{x}{2}t^2 - t' + \frac{x}{2}t'^2 = (t-t') \left(1 - \frac{x(t+t')}{2} \right).$$

Comme $x \in [0,1]$ et $\frac{t+t'}{2} \in [0,1]$ (car $t, t' \in [0,1]$), on a $\frac{x(t+t')}{2} \in [0,1]$ et donc $1 - \frac{x(t+t')}{2} \in [0,1]$. Alors

$$|T_x(t) - T_x(t')| = |t-t'| \left| 1 - \frac{x(t+t')}{2} \right| = |t-t'| \left(1 - \frac{x(t+t')}{2} \right) \leq |t-t'|.$$

Ce qui prouve que :

T_x est 1-lipschitzienne sur $[0,1]$.

De même, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\frac{x}{2}t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (avec $x \in [0,1]$), donc $T_x(t) = t - \frac{x}{2}t^2 = t \left(1 - \frac{x}{2}t \right) \in [0,1]$. Ainsi :

$T_x([0,1]) \subset [0,1]$

On a $h_0([0,1]) \subset [0,1]$.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $h_n([0,1]) \subset [0,1]$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\frac{x}{2} \in [0,1]$, donc :

$$h_n\left(\frac{x}{2}\right) \in [0,1] \text{ et } h_{n+1}(x) = T_x\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) \in [0,1]$$

car $T_x([0,1]) \subset [0,1]$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n([0,1]) \subset [0,1].$$

Soit maintenant $x \in [0,1]$ fixé. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = \left| T_x\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) - T_x\left(h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right| \leq \left| h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right|.$$

De même, $\left| h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \leq \left| h_{n-1}\left(\frac{x}{4}\right) - h_{n-2}\left(\frac{x}{4}\right) \right|$ (si $n \geq 2$), donc :

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_{n-1}\left(\frac{x}{2^2}\right) - h_{n-2}\left(\frac{x}{2^2}\right) \right|.$$

On continue jusqu'à obtenir :

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left| h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|.$$

Ce résultat est aussi vrai pour $n = 0$, donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et $h_0 : x \mapsto 1$ et $h_1 : x \mapsto 1 - \frac{x}{2}$, donc $h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right) = -\frac{1}{2} \frac{x}{2^n}$ et :

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\sup_{x \in [0,1]} |h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ converge, la série de fonctions $\sum (h_{n+1} - h_n)$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$, ce qui prouve que :

La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

4) Notons h la limite de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h_n\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 \right] = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2.$$

Donc, h vérifie $h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} \left(h\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2$ sur $[0,1]$, ou bien $h(2x) = h(x) - x h(x)^2$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Alors, la fonction $f : x \mapsto xh(x)$ est définie sur $[0,1]$ et, d'après la question 2, on a $f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (alors, $2x \in [0,1]$ et $f(2x)$ est bien défini), donc f est une solution de (E) sur $[0,1]$.

De plus, la fonction h est limite de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec h_0 constante donc continue sur $[0,1]$. Une récurrence simple permet de prouver que toutes fonctions h_n sont continues sur $[0,1]$, et comme la convergence de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers h est uniforme, la fonction h est continue sur $[0,1]$. La fonction f est alors continue sur $[0,1]$ en tant que produit de telles fonctions.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{n+1}(0) = h_n(0) = h_0(0) = 1$, et comme h est continue, elle ne s'annule pas au voisinage de 0. Alors, la fonction f ne s'annule alors pas non plus au voisinage de 0 (exclu), donc n'est pas nulle et comme $f(0) = 0$, ce n'est pas $x \mapsto \frac{1}{2}$. Comme $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{1}{2}$ sont les deux seules solutions constantes de (E) , f n'est pas constante et finalement :

L'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0,1]$.

5) En conservant la fonction f de la question précédente, posons pour tout $x \in]1,2]$, $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$. On a alors pour tout $x \in [0,1]$, $2x \in [0,2]$ donc $f(2x)$ est bien défini et $f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$ (d'après la question précédente quand $x \leq \frac{1}{2}$, et par définition de f sur $]1,2]$ quand $x > \frac{1}{2}$). Donc, f est définie sur $[0,2]$ et vérifie (E) . Elle est plus continue sur $[0,1[$ et sur $]1,2]$, avec $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ et :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [2f(x) - 2f(x)^2] = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1).$$

Ainsi, on a construit une solution de (E) continue et non constante sur $[0,2]$.

En recommençant ainsi, on construit une solution de (E) continue et non constante sur $[0,4]$, puis sur $[0,8]$, puis sur tout $[0,2^p]$ avec $p \in \mathbb{N}$ et finalement sur \mathbb{R}_+ . Ainsi :

L'équation (E) admet une solution continue et non constante sur \mathbb{R}_+ .