

## Corrigés des TD du chapitre 5

### Exercice 1

a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$|a_n z^n| = \left| \frac{i^n n^2}{(n^2 + 1)2^n} z^n \right| = \frac{n^2}{n^2 + 1} \left( \frac{|z|}{2} \right)^n.$$

La suite  $(|a_n z^n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $|z| \leq 2$ , donc  $R = 2$  et pour  $|z| = 2$ ,  $|a_n z^n| \rightarrow 1$ , donc  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement. Ainsi :

$$R = 2 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}$$

b. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathbb{C}^*$  :

$$|a_n z^n| = \left| \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^n \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \left( \frac{|z|}{e} \right)^n.$$

Comme ci-dessus :

$$R = e \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}$$

c. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a :

$$|a_n z^n| \leq 9|z|^n.$$

Or, la suite  $(9|z|^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée quand  $|z| \leq 1$ , donc  $(|a_n z^n|)_{n \in \mathbb{N}}$  aussi.

Remarquons que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de chiffres (entiers compris entre 0 et 9) qui ne converge pas vers 0, car sinon, elle serait stationnaire sur 0 et  $\sqrt{2}$  serait décimal, ce qui est faux. Donc, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum a_n (e^{i\theta})^n$  diverge grossièrement et ainsi :

$$R = 1 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}$$

*Pour mémoire* : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = E(10^n \sqrt{2}) - 10E(10^{n-1} \sqrt{2})$ .

d. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$|a_n x^n| = \left| \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} x^n \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^n.$$

La suite  $(|a_n x^n|)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $|x| \leq 1$ , donc  $R = 1$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$a_n = \ln \left( \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) = \ln \left[ \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \right] = \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Donc :

$$a_n = \left[ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n\sqrt{n}} \right).$$

Les séries  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$  convergent (CSSA, la seconde est même absolument convergente), mais pas la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$ , donc  $\sum a_n$  diverge.

De plus, avec ce qui précède, on a immédiatement  $(-1)^n a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , donc  $\sum (-1)^n a_n$  diverge.

Finalement :

$$R = 1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}$$

e. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto x^3 + nx - 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$ , donc elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et s'annule une unique fois en  $a_n$ . Comme elle vaut  $-1 < 0$  en 0 et  $n \geq 0$  en 1, on a de plus,  $0 < a_n \leq 1$ . Enfin :

$$a_n^3 + na_n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 - a_n^3}{a_n} = g(a_n).$$

La fonction  $g : x \mapsto \frac{1 - x^3}{x} = \frac{1}{x} - x^2$  est continue sur  $]0; 1]$  et strictement décroissante de  $+\infty$  à 0, donc elle réalise une bijection de  $]0; 1]$  dans  $\mathbb{R}_+$ . On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = g^{-1}(n)$ .

D'après le théorème de la bijection continue,  $g^{-1}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et décroissante de 1 à 0, donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, de limite nulle.

Comme  $a_n^3 + na_n - 1 = 0$ , on a  $na_n = 1 - a_n^3 \rightarrow 1$ , donc  $a_n \sim \frac{1}{n}$ .

Ceci nous permet de conclure que :

- le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est  $R = 1$  ;
- la série  $\sum a_n$  diverge.

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la relation  $a_n^3 + na_n - 1 = 0$  peut se récrire  $a_n = \frac{1}{n} - \frac{a_n^3}{n}$  et comme  $a_n \sim \frac{1}{n}$ , on a

$a_n^3 \sim \frac{1}{n^3}$ , soit  $a_n^3 = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$  et ainsi :

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Alors, comme la série alternée  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge et la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^4}$  converge absolument :

- la série  $\sum (-1)^n a_n$  converge.

Finalement :

$$R = 1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge pour } x = 1 \text{ et converge pour } x = -1.$$

f. Pour tout entier  $n \geq 2$  et tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} |x| = \left( 1 + \frac{1}{\ln n} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) |x| \rightarrow |x|.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert,  $R = 1$ .

Les séries  $\sum (-1)^n \ln n$  et  $\sum \ln n$  divergent grossièrement, donc :

$$R = 1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}$$

De plus, pour tout  $x \in ]-1; 1[$  et tout entier  $N \geq 2$ , on a :

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=1}^N a_n x^n &= (1-x) \sum_{n=1}^N (\ln n) x^n = \sum_{n=1}^N (\ln n) x^n - \sum_{n=1}^N (\ln n) x^{n+1} = \sum_{n=2}^N (\ln n) x^n - \sum_{n=2}^{N+1} (\ln(n-1)) x^n \\ &= \sum_{n=2}^N [\ln n - \ln(n-1)] x^n + (\ln N) x^{N+1} = - \sum_{n=2}^N \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) x^n + (\ln N) x^{N+1} \end{aligned}$$

Soit, pour tout  $x \in ]-1; 1[$  et tout entier  $N \geq 2$  :

$$\sum_{n=1}^N a_n x^n = - \frac{1}{1-x} \sum_{n=2}^N \left[ \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right] x^n + \frac{(\ln N) x^{N+1}}{1-x}.$$

Comme  $(\ln N) x^{N+1} \rightarrow 0$  quand  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient, pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$f(x) = - \frac{1}{1-x} \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) x^n.$$

On a  $\ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right)$ , donc si  $b_n = -\ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}$ , on a  $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ .

Et, pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} + b_n \right) x^n.$$

On a vu dans le cours que pour tout  $x \in ]-1; 1[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$ , donc :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \left[ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n \right] = \frac{1}{1-x} \left[ -\ln(1-x) - x + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n \right].$$

Comme  $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ , la série  $\sum b_n x^n$  converge normalement sur  $[-1; 1]$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n$  est finie.

Enfin, comme  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [-\ln(1-x)] = +\infty$ , on a  $-\ln(1-x) - x + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$ , d'où :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} - \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

**Exercice 2**

1) a. On a  $a_n \sim n^2$  donc :

$$R = 1$$

Pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} \left( n^2 - n + 2 + \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n \geq 0} n^2 x^n - \sum_{n \geq 0} n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}.$$

Et pour tout  $x \in ]-1; 1[ \setminus \{0\}$  :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} n^2 x^n - \sum_{n \geq 0} n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} x^n + \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

On a :

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n \geq 0} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n \geq 0} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

On obtient, pour tout  $x \in ]-1; 1[ \setminus \{0\}$  :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$$

b. On a  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^3} \rightarrow 0$ , on a :

$$R = +\infty$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1) + 3n + 1}{n!} x^n = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{(n-2)!} + 3 \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = x^2 \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} + 3x \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Donc :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = (x^2 + 3x + 1)e^x$$

c. On a  $a_n \sim \frac{1}{n}$ , donc :

$$R = 1$$

Pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n - (-1)^n} x^n = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n-1} x^n + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n+1} x^n.$$

Alors, pour tout  $x \in ]-1; 1[\setminus\{0\}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -1 + x \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} \\ &= -1 + x \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{x^n}{n} + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} - x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} = -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} \\ &= -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^{2n}}{2n} = -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{(x^2)^n}{n} \end{aligned}$$

Et avec  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ , on obtient, pour tout  $x \in ]-1; 1[\setminus\{0\}$  :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n x^n = -1 - x \ln(1-x) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x\right) \ln(1-x^2)}$$

d. On a  $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \rightarrow 2 \frac{2n-1}{n+1} |x| = 4|x|$ , on a :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}$$

Pour tout  $x \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$ , on a :

$$\begin{aligned} (1+4x)f'(x) - 2f(x) &= (1+4x) \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n \geq 0} (2n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \binom{2n+2}{n+1} x^n + 2 \sum_{n \geq 0} (2n-1) \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[ (n+1) \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} + 2(2n-1) \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n} \right] x^n \end{aligned}$$

Donc, on a bien pour tout  $x \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$  :

$$(1+4x)f'(x) - 2f(x) = 0.$$

Ainsi,  $f$  est solution sur  $\left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$  de l'équation différentielle :

$$(E): y' - \frac{2}{1+4x} y = 0.$$

Les solutions de (E) sont de la forme  $x \mapsto k\sqrt{1+4x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Avec  $f(0) = a_0 = -1$ , on obtient, pour tout  $x \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$  :

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{1+4x}}$$

2) a. On a pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Remarquons que  $\frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et  $\frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , donc  $\sum \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n$  et  $\sum \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$  convergent et ainsi, la série  $\sum a_n$  converge bien et on peut écrire :

$$\sum_{n \geq 2} a_n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Comme ci-dessus,  $\sum \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n$  et  $\sum \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$  convergent, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} a_n &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{2}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{3}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $x \in ]-1;1[$ , on a  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ , donc :

$$\sum_{n \geq 2} a_n = \frac{3}{5} \left[ -\ln\left(1 - \frac{3}{5}\right) \right] - \frac{3}{5} \left[ -\ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) \right] + \frac{2}{5}.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n \geq 2} a_n = \frac{3}{5} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{5}}$$

b. Ici, la série converge clairement.

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$ , donc avec  $j$  tel que  $j^3 = 1$  :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = e^1 + e^j + e^{j^2}.$$

Or :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!}.$$

On a  $1 + j + j^2 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- si  $n = 3k$ ,  $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k} + j^{6k} = 3$  ;
- si  $n = 3k + 1$ ,  $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+1} + j^{6k+2} = 1 + j + j^2 = 0$  ;
- si  $n = 3k + 2$ ,  $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+2} + j^{6k+4} = 1 + j^2 + j = 0$ .

Donc :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 3|n}} \frac{3}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{3}{(3n)!} = 3 \sum_{n \geq 0} a_n.$$

Ainsi :

$$3 \sum_{n \geq 0} a_n = e + e^j + e^{j^2}.$$

Avec  $j^2 = \bar{j}$ , donc  $e^{j^2} = e^{\bar{j}} = \overline{e^j}$ , on obtient :

$$e^j + e^{j^2} = e^j + \overline{e^j} = 2 \operatorname{Re}(e^j) = 2 \operatorname{Re}(e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}) = 2e^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re}(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Et finalement :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n = \frac{1}{3} \left[ e + \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]}$$

### Exercice 3

1) On notera  $R$  le rayon de convergence de la série entière.

a. On a pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f(x) = \frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{2 \cos 2x \sin 2x}{\sin x} = \frac{4 \cos 2x \cos x \sin x}{\sin x} = 4 \cos 2x \cos x = 2(\cos 3x + \cos x).$$

Remarquons que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

La fonction cosinus est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  avec  $\cos x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ .

D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$ , soit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n 2 \frac{9^n + 1}{(2n)!} x^{2n} \text{ avec } R = +\infty}$$

b. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1).$$

Donc, pour tout  $X \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$  :

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2} = \frac{1}{(X-2)(X-1)} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{2-X} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{X}{2}}.$$

Soit, pour tout  $X \in ]-1; 1[$  :

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{X}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) X^n.$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^{2n} \text{ avec } R = 1}$$

c. Posons  $u(x) = \frac{1+x}{1-x} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . La fonction  $u$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , rationnelle donc dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et :

$$u'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La fonction  $f : x \mapsto \arctan(u(x))$  est alors définie et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , comme composée de  $u$  par la fonction arctangente qui est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2} \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1+x^2) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - 2x \left(1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{\sin \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{\sin \alpha}{(x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x - e^{i\alpha}} - \frac{1}{x - e^{-i\alpha}} \right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x} - \frac{e^{-i\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}x} \right).$$

Or, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ , on a  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ .

Alors, pour tout  $x \in ]-1; 1[$ , on a  $|e^{i\alpha}x| < 1$  et  $|e^{-i\alpha}x| < 1$  donc  $\frac{1}{1 - e^{i\alpha}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\alpha}x)^n$  et  $\frac{1}{1 - e^{-i\alpha}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-i\alpha}x)^n$ , et :

$$f'(x) = \frac{1}{2i} \left( e^{i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\alpha}x)^n - e^{-i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-i\alpha}x)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}}{2i} x^n.$$

Soit, pour tout  $x \in ]-1; 1[$  :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha) x^n.$$

En intégrant terme à terme et avec  $f(0) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2}$  (car  $\frac{\alpha}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ), on obtient :

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\alpha)}{n+1} x^{n+1} = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n.$$

Remarquons que si  $|x| > 1$ , alors  $\left(\frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas et finalement :

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n \text{ avec } R=1.$$

2) Comme  $\operatorname{ch} x = 1$  uniquement en  $x = 0$ , la fonction  $f : x \mapsto \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1}$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  en tant que différence de telles fonctions et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - x^2}{x^2(\operatorname{ch} x - 1)}.$$



La fonction  $\operatorname{ch}$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  avec  $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ , donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$2(\operatorname{ch} x - 1) - x^2 = 2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) - x^2 = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} = x^4 g(x) \text{ avec } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+4)!} x^{2n}$$

$$x^2(\operatorname{ch} x - 1) = x^2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = x^4 h(x) \text{ avec } h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Alors, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f(x) = \frac{x^4 g(x)}{x^4 h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Remarquons que  $h(0) = \frac{1}{2} \neq 0$  et sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $x^2 h(x) = \operatorname{ch} x - 1 \neq 0$  donc  $h(x) \neq 0$ . Ainsi,  $h$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, les fonctions  $g$  et  $h$  sont (de par leur définition) développables en série entière sur  $\mathbb{R}$ , donc de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a alors  $\lim_0 f = \frac{g(0)}{h(0)} = \frac{1}{6}$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et, ainsi prolongée,  $f = \frac{g}{h}$  est le quotient de deux fonctions  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  dont le dénominateur ne s'annule jamais, donc :

La fonction  $f$  se prolonge par continuité en une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 4

1) Notons  $R > 0$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ .

La fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $] -R; R[$  avec :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Comme  $f$  est solution de (E), on a pour tout  $x \in ] -R; R[$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + b \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + b(n+1) a_{n+1} + c a_n] x^n = 0.$$

Or, une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + b(n+1) a_{n+1} + c a_n = 0$$

2) Si  $c = -b - 1$ , l'équation (E) devient  $y'' + by' - (b+1)y = 0$  et la relation ci-dessus s'écrit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_{n+2} = -\frac{b}{n+2} a_{n+1} + \frac{b+1}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est  $r^2 + br - (b+1) = 0$  de discriminant  $\Delta = b^2 + 4(b+1) = (b+2)^2$ .

Les racines sont  $r_1 = \frac{-b + (b+2)}{2} = 1$  et  $r_2 = \frac{-b - (b+2)}{2} = -b - 1$ , et 1 est une racine double quand  $b = -2$ .

- Quand  $b = -2$ , les solutions de  $(E)$  sont de la forme  $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ , soit :

$$x \mapsto (\lambda x + \mu) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda n + \mu}{n!} x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{\lambda n + \mu}{n!}$ .

- Quand  $b \neq -2$ , les solutions de  $(E)$  sont de la forme  $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-(b+1)x}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ , soit :

$$x \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-(b+1)x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda + \mu(-b-1)^n}{n!} x^n.$$

Et, toujours par unicité du développement en série entière, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{\lambda + \mu(-b-1)^n}{n!}$ .

Finalement, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_n = \begin{cases} \frac{\lambda + \mu(-b-1)^n}{n!} & \text{quand } b \neq -2 \\ \frac{\lambda n + \mu}{n!} & \text{quand } b = -2 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

### Exercice 5

- 1) a. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \geq 0$  et  $f$  est bornée sur  $[0; 1[$ , il existe un réel  $M > 0$  tel que :

$$\forall x \in [0; 1[, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = f(x) \leq M.$$

On a donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0; 1[$ ,  $0 \leq \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq M$  et en passant à la limite quand  $x \rightarrow 1^-$ , on

obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq M$ . Ainsi,  $\sum a_n$  est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par un réel fixé, donc :

La série  $\sum a_n$  converge.

On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [-1; 1]$ ,  $|a_n x^n| \leq a_n$  et  $\sum a_n$  converge, donc la série  $\sum a_n x^n$  converge normalement sur  $[-1; 1]$ . Sa somme est alors continue sur ce segment et donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ , soit :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n$$

- b. Prenons  $a_n = (-1)^n$ . On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0; 1[$  :

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Donc, on a bien  $R = 1$  et  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$  est bornée sur  $[0; 1[$ .

Par contre, série  $\sum a_n = \sum (-1)^n$  diverge, donc :

Le résultat ne subsiste pas quand les  $a_n$  sont de signe quelconque.

2) a. Posons  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ .

Commençons par remarquer que la série  $\sum \frac{S}{(n+1)(n+2)}$  converge absolument, avec :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = S.$$

La série entière  $\sum \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n$  admet 1 pour rayon de convergence et converge alors normalement sur  $[-1; 1]$  et sa somme est continue sur ce segment, d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S.$$

Posons  $b_n = a_n R^n - \frac{S}{(n+1)(n+2)}$ . On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (Rx)^k - \sum_{k=0}^n \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k.$$

Comme le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  est 1,  $\sum a_n (Rx)^n$  converge pour  $|Rx| < R$ , soit  $|x| < 1$  et diverge pour  $|Rx| > R$ , soit  $|x| > 1$ , donc le rayon de convergence de  $\sum a_n (Rx)^n$  est 1 et ainsi, celui de  $\sum b_n x^n$  est aussi égal à 1. De plus, on a :

$$\sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} \left( a_n R^n - \frac{S}{(n+1)(n+2)} \right) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n - \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S - S = 0.$$

Et enfin, si on pose  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ , on a pour tout  $x \in ]-1; 1[$ ,  $g(x) = f(Rx) - \sum_{k=0}^n \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k$  et, comme

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n = S$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(Rx) = S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( f(Rx) - \sum_{k=0}^n \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k \right) = S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0.$$

Finalement, on a  $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = S$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} b_n x^n = 0$  où rayon de convergence de  $\sum b_n x^n$  est 1 et

$\sum_{n \geq 0} b_n = 0$ . Ceci prouve que :

On peut se ramener au cas où  $R = 1$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$ .

b. Pour tout  $x \in ]0; 1[$  et tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1}) x^n &= \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=0}^N S_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=1}^N S_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=0}^N S_n x^{n+1} + S_N x^{N+1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^N S_n (x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}$$

c. Soit  $x \in ]0;1[$ . On a :

- $S_N = \sum_{k=0}^N a_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 0$ , donc  $S_N x^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  ;
- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n - S_{n-1} = a_n$ , donc  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1})x^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$  ;
- pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^N S_n (x^n - x^{n+1}) = (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n$ .

La relation de la question précédente permet de conclure que  $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$  existe et que pour tout  $x \in ]0;1[$  :

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

On a vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$ , donc pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a  $|S_n| \leq \varepsilon$ .

Alors, pour tout  $x \in ]0;1[$  et tout entier  $n > N$  :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |S_n| x^n \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{1-x}.$$

Donc :

$$|f(x)| = (1-x) \left| \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \right| = (1-x) \left| \sum_{n=0}^N S_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n \right| \leq (1-x) \left| \sum_{n=0}^N S_n x^n \right| + (1-x) \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n + \varepsilon.$$

Et la fonction  $x \mapsto (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n$  est polynomiale donc continue sur  $\mathbb{R}$  et s'annule en 1, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n = 0.$$

Alors, il existe  $\alpha \in ]0;1[$  tel que pour tout  $x \in ]1-\alpha;1[$ , on a  $\left| (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n \right| \leq \varepsilon$  et finalement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in ]0;1[, \forall x \in ]1-\alpha;1[, |f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

**Exercice 6**

1) a. Remarquons déjà que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = a_0 c_n + \sum_{k=1}^n a_k c_{n-k} = c_n + \sum_{k=1}^n a_k c_{n-k}$ , donc :

$$\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = 0 \Leftrightarrow c_n = - \sum_{k=1}^n a_k c_{n-k} = -a_1 c_{n-1} - a_2 c_{n-2} - \dots - a_{n-1} c_1 - a_n c_0.$$

Comme  $c_0 = 1$ , la suite est définie de manière unique par récurrence (forte : un terme dépend de tous les précédents). Ainsi :

Il existe bien une unique suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $c_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = 0$ .

b. Si  $r \in ]0; R[$ , la série  $\sum a_n r^n$  converge, donc  $a_n r^n \rightarrow 0$ . Or, toute suite convergente est bornée, donc  $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et ainsi :

Il existe bien un réel  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n r^n| \leq M$ .

La suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant définie par récurrence forte, prouvons l'inégalité voulue par récurrence forte.

Au rang  $n=1$ , on a  $c_1 = -a_1 c_0 = -a_1$ , donc, avec  $|a_1 r^1| \leq M$ , on a :

$$|c_1| = |a_1| \leq \frac{M}{r} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}.$$

L'inégalité est vraie au rang  $n=1$ .

Supposons l'inégalité vraie jusqu'à un rang  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a alors :

$$|c_{n+1}| = \left| - \sum_{k=1}^{n+1} a_k c_{n+1-k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k c_{n+1-k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| |c_{n+1-k}| = \sum_{k=1}^n |a_k| |c_{n+1-k}| + |a_{n+1}| |c_0| = \sum_{k=1}^n |a_k| |c_{n+1-k}| + |a_{n+1}|.$$

Or,  $|a_{n+1}| \leq \frac{M}{r^{n+1}}$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$  et,  $n+1-k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , donc par hypothèse de récurrence, on a

$$|c_{n+1-k}| \leq \frac{M(M+1)^{n+1-k-1}}{r^{n+1-k}} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}}. \text{ Ainsi :}$$

$$|c_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{r^k} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}}.$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{M}{r^k} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} &= \frac{M^2}{r^{n+1}} \sum_{k=1}^n (M+1)^{n-k} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M^2}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (M+1)^k + \frac{M}{r^{n+1}} \\ &= \frac{M^2}{r^{n+1}} \frac{(M+1)^n - 1}{(M+1) - 1} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^{n+1}} \left[ (M+1)^n - 1 \right] + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc  $|c_{n+1}| \leq \frac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}}$  et l'inégalité est vraie au rang  $n+1$ .

Finalement, la propriété est initialisé et héréditaire, donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |c_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}.$$

c. On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left| c_n \left( \frac{r}{M+1} \right)^n \right| \leq \frac{M}{M+1}$ . Donc la suite  $\left( c_n \left( \frac{r}{M+1} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, ce qui prouve que la série entière  $\sum c_n x^n$  a un rayon de convergence supérieur ou égal à  $\frac{r}{M+1} > 0$ , donc :

$$\boxed{\sum c_n x^n \text{ a un rayon de convergence non nul.}}$$

Si on appelle  $R''$  le rayon de convergence de  $h(x) = \sum c_n x^n$  et  $\rho = \min(R, R'')$ , on a pour tout  $x \in ]-\rho; \rho[$  :

$$f(x)h(x) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} \right) x^n = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 x^n = 1.$$

Donc,  $h(x) = \frac{1}{f(x)}$  sur  $]-\rho; \rho[$ , ce qui prouve que :

$$\boxed{\frac{1}{f} \text{ est développable en série entière au voisinage de 0.}}$$

2) On a  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  avec  $R' = 1$ , donc  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -1; 1[$  avec  $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$ .

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n > 0$ , on a  $g'(x) > 0$  sur  $]0; 1[$ , donc  $g$  est strictement croissante sur cet intervalle.

Si  $g$  est bornée sur  $]0; 1[$ , alors on se retrouve dans la situation de la question 1 de l'exercice 4, donc  $\sum b_n$  converge, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi,  $g$  est croissante et non bornée sur  $]0; 1[$  donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty}$$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$ , alors pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on a, avec  $b_n > 0$  :

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \ell + \varepsilon \Leftrightarrow (\ell - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (\ell + \varepsilon)b_n.$$

Alors, pour tout  $x \in ]0; 1[$  et tout entier  $n > N$  :

$$\sum_{k=N+1}^n (\ell - \varepsilon)b_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^n a_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^n (\ell + \varepsilon)b_k x^k \Leftrightarrow (\ell - \varepsilon) \sum_{k=N+1}^n b_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^n a_k x^k \leq (\ell + \varepsilon) \sum_{k=N+1}^n b_k x^k.$$

Soit en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , pour tout  $x \in ]0; 1[$  :

$$(\ell - \varepsilon)(g(x) - g_N(x)) \leq f(x) - f_N(x) \leq (\ell + \varepsilon)(g(x) - g_N(x)).$$

avec  $f_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$  et  $g_N(x) = \sum_{k=0}^N b_k x^k$ .

Comme  $g(x) > 0$  sur  $]0; 1[$ , on a, pour tout  $x \in ]0; 1[$  :

$$\ell - \varepsilon + \frac{f_N(x) - (\ell - \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \varepsilon + \frac{f_N(x) - (\ell + \varepsilon)g_N(x)}{g(x)}.$$

Or,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f_N(x) - (\ell \pm \varepsilon)g_N(x)] = f_N(1) - (\ell \pm \varepsilon)g_N(1)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_N(x) - (\ell \pm \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} = 0$  et ainsi, il existe  $\alpha \in ]0;1[$  tel que pour tout  $x \in ]1-\alpha;1[$ , on a :

$$-\varepsilon \leq \frac{f_N(x) - (\ell - \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq \frac{f_N(x) - (\ell + \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha \in ]0;1[$  tel que pour tout  $x \in ]1-\alpha;1[$ , on a :

$$\ell - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell}$$

### Exercice 8

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\frac{\frac{(2n+3)!}{((n+1)!)^2} x^{2(n+1)}}{\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}} = \frac{2(2n+3)}{n+1} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4x^2$ , donc, d'après la règle de

d'Alembert, si  $4x^2 < 1$ , soit  $|x| < \frac{1}{2}$ , la série  $\sum \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$  converge et si  $4x^2 > 1$ ,  $|x| > \frac{1}{2}$ , elle diverge.

Le rayon de convergence de  $\sum \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$  est  $R = \frac{1}{2}$ .

Pour tout réel  $\alpha$  non nul, la série entière  $\sum (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$  admet 1 pour rayon de convergence et

a pour somme  $(1-x)^\alpha$ . En prenant  $\alpha = -\frac{3}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right) = (-1)^n \frac{3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)}{2^n} \\ &= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^n \times 2 \times 4 \times \dots \times (2n)} = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!} \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x \in ]-1,1[$  :

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} x^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Alors, pour tout  $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ , on a  $4x^2 \in ]-1,1[$  et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \left(\frac{4x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n} = \frac{1}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n} \text{ est } R = \frac{1}{2} \text{ et sa somme est } x \mapsto \frac{1}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}.}$$

**Exercice 9**

1) Comme  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que  $n = o(p_n)$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$  et donc, pour tout réel  $x$  tel que  $|x| > 1$ , la suite  $(x^{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$  diverge, donc la série  $\sum x^{p_n}$  diverge grossièrement.

Si maintenant  $x \in ]-1, 1[$ , alors on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n^2 x^{p_n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} N^2 x^N = 0$ , donc  $x^{p_n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{p_n^2} \right)$ .

Or,  $n = o_{n \rightarrow +\infty} (p_n)$ , donc  $\frac{1}{p_n^2} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  et ainsi,  $x^{p_n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ . Par comparaison à la série de Riemann convergente  $\sum \frac{1}{n^2}$ , la série  $\sum x^{p_n}$  converge.

Finalement :

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum x^{p_n}$  est 1.

2) Pour tous  $x, x' \in ]0, 1[$  tels que  $x < x'$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $x^{p_n} \leq x'^{p_n}$  (avec égalité seulement dans le cas où  $n=0$  et  $p_0=0$ ), donc  $\sum_{n \geq 2} x^{p_n} \leq \sum_{n \geq 2} x'^{p_n}$  et comme  $x^{p_0} \leq x'^{p_0}$  et  $x^{p_1} < x'^{p_1}$  (l'inégalité est stricte car  $p_1 > p_0 \geq 0$ , donc  $p_1 \neq 0$ ), on obtient  $f(x) < f(x')$  et donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$ .

Supposons que  $f$  est majorée sur cet intervalle, Alors on a  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L = \sup_{]0, 1[} f \in \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$f(x) \leq L$ . Or, pour tout  $x \in ]0, 1[$  et tout  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=0}^N x^{p_n} \leq \sum_{n \geq 0} x^{p_n} = f(x)$ , donc :

$$\sum_{n=0}^N x^{p_n} \leq L.$$

En faisant tendre  $x$  vers 1, on obtient  $N+1 \leq L$  et ceci pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , ce qui est absurde.

Ainsi,  $f$  n'est pas majorée sur  $]0, 1[$  et comme elle est croissante :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

3) On a  $n = o_{n \rightarrow +\infty} (p_n)$ , donc pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $n \leq \varepsilon p_n$ .

Alors,  $p_n \geq \frac{n}{\varepsilon}$  et pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,  $x^{p_n} \leq x^{n/\varepsilon}$ , donc  $\sum_{n \geq N} x^{p_n} \leq \sum_{n \geq N} x^{n/\varepsilon} = \sum_{n \geq N} (x^{1/\varepsilon})^n = x^{N/\varepsilon} \frac{1}{1-x^{1/\varepsilon}} \leq \frac{1}{1-x^{1/\varepsilon}}$  et :

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq (1-x)Q(x) + \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}}$$

avec  $Q(x) = \sum_{n=0}^N x^{p_n}$ .

La fonction  $t \mapsto t^{1/\varepsilon}$  est dérivable sur  $[x, 1]$ , de dérivée  $t \mapsto \frac{1}{\varepsilon} t^{1/\varepsilon-1}$ , donc d'après le théorème des

accroissements finis, il existe  $t_x \in [x, 1]$  tel que  $\frac{x^{1/\varepsilon} - 1^{1/\varepsilon}}{x-1} = \frac{1}{\varepsilon} t_x^{1/\varepsilon-1}$ , soit  $\frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} = \varepsilon t_x^{1-1/\varepsilon}$ .



On a  $t_x \in [x, 1]$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1} t_x = 1$ .

Alors,  $\lim_{x \rightarrow 1} t_x^{1-1/\varepsilon} = 1$  et il existe  $\alpha_1 \in ]0, 1[$  tel que pour tout  $x \in ]\alpha_1, 1[$ ,  $t_x^{1-1/\varepsilon} \leq \frac{3}{2}$ .

De plus,  $Q$  est une fonction polynomiale, donc  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)Q(x) = 0$  et il existe  $\alpha_2 \in ]0, 1[$  tel que pour tout

$x \in ]\alpha_2, 1[$ , on a  $(1-x)Q(x) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ .

Alors, en posant  $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2) \in ]0, 1[$ , on a pour tout  $x \in ]\alpha, 1[$  :

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq (1-x)Q(x) + \varepsilon t_x^{1-1/\varepsilon} \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0}$$