DS de Mathématiques n° 1

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 4 pages.

Problème n° 1

Moyenne de Césaro et séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k \quad \text{et} \quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{S_n}{n}$$

(v est la moyenne de Césaro de u).

L'objet de ce problème est d'étudier la nature de la série $\sum v_n$, suivant celle de $\sum u_n$.

PRELIMINAIRES

Soit $f\in C^1\left([1,+\infty[,\mathbb{C}\right)$.

1) Montrer que s'il existe $h\in C\left([1,+\infty[,\mathbb{R}_+\right)$ telle que $x\mapsto\int_1^x h(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$ et, pour tout $x\in[1,+\infty[$, $|f(x)|\le h(x)$, alors $x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

2) Prouver que si $x\mapsto\int_1^x|f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$, alors $x\mapsto\int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

   ☺ *On s'inspirera de la preuve de la propriété disant qu'une série absolument convergente est convergente, notamment en commençant par le cas où f est à valeurs réelles.*

3) On suppose que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$.

   a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

   $$w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t)f'(t)dt,$$

   puis que :

   $$|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt.$$

   b. En déduire que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

   c. Prouver alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) On pose $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

   a. Montrer que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

   b. Prouver que $\forall\, x \in [1, +\infty[$:

   $$\int_1^x f(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u}du = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2}du\right).$$

   c. En déduire que la série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge.

PARTIE I

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.

5) Déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante quand $S \neq 0$.

6) On pose ici $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$ (E désigne la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S, puis déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

7) On pose ici $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln\left[1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\right]}$ (E désigne encore la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S, puis, à l'aide des préliminaires, déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

8) Que déduire des deux questions précédentes ?

Partie II

9) On suppose ici que la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Déterminer la nature de $\sum v_n$.

Partie III

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

10) On pose ici $u_n = (-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

11) On pose ici $u_1 = -1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = 2(-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

12) Que déduire des deux questions précédentes ?

Partie IV

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge, mais pas grossièrement, et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

13) On pose ici $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

On rappelle que la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

14) On reprend ici la même suite que dans la question précédente en rajoutant 1 au premier terme, soit $u_1 = 1 + \sin 1$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie toujours les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

15) Que déduire des deux questions précédentes ?

Conclusion

16) Dans quels cas peut-on conclure quant à la nature de $\sum v_n$ quand on connait le comportement de $\sum u_n$?

Problème n° 2

Extrait et adapté de Centrale PC – 2003

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n(a)=\sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad S_n(b)=\sum_{k=0}^{n} b_k .$$

Dans le cas où ces séries convergent, on note pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$R_n(a)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad R_n(b)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k .$$

1) Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $R_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n(b)$.

   En déduire que $S_n(a)=S(a)-R_n(b)+\underset{n\to+\infty}{o}\left(R_n(b)\right)$ où $S(a)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

2) Montrer que si $\sum a_n$ diverge, alors $S_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n(b)$.

3) Prouver (*sans utiliser la comparaison série-intégrale*) que pour tout entier $p\geq 2$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} .$$

   ☺ *On pourra remarquer que* :

$$\frac{1}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)...(n+p-1)} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+p-2)}-\frac{1}{(n+1)...(n+p-1)}\right).$$

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

   a. A l'aide de ce qui précède, prouver que :

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

   où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer.

   ☺ *On pourra poser* $u_n=H_n-\ln n-\frac{1}{2n}$ *et s'intéresser à la série* $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

   b. Déterminer le terme suivant du développement asymptotique de H_n.

5) Montrer que $n!=\delta n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left[1+\frac{1}{12n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

   Que veut δ ? *On utilisera une formule du cours sans la démontrer.*