

**TD du chapitre 5 : Séries entières**
**Exercice 1**

Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n z^n$  et étudier la convergence au bord du disque de convergence pour :

a.  $a_n = \frac{i^n n^2}{(n^2 + 1)2^n}$ .

b.  $a_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$ .

c.  $a_n$  est le  $n^{\text{ième}}$  chiffre après la virgule de  $\sqrt{2}$  (avec  $a_0 = 1$ ).

d.  $a_n = \ln \left( \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)$ .

e.  $a_n$  est l'unique solution réelle de  $x^3 + nx - 1 = 0$ .

f.  $a_n = \ln n$  (en considérant  $(1-x)f(x)$ , on donnera un équivalent en 1 de la somme  $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$ ).

On étudiera les trois dernières sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2**

1) Déterminer le rayon de convergence, le domaine de convergence et calculer la somme  $f$  de  $\sum a_n x^n$  pour :

a.  $a_n = \frac{n^3 + n + 3}{n+1}$     b.  $a_n = \frac{(n+1)^2}{n!}$     c.  $a_n = \frac{1}{n - (-1)^n}$     d.  $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n}$  (établir :  $2f = (1+4x)f'$ ).

2) Déterminer la somme de la série  $\sum a_n$  pour :

a.  $a_n = \frac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)}$ .    b.  $a_n = \frac{1}{(3n)!}$ .

**Exercice 3**

1) Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

a.  $f : x \mapsto \frac{\sin 4x}{\sin x}$ .

b.  $f : x \mapsto \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2}$ .

c.  $f : x \mapsto \arctan \left( \frac{1+x}{1-x} \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right)$  ( $\alpha \in ]0; \pi[$ ). ☺ On pourra commencer par  $f'$ .

2) Montrer que  $f : x \mapsto \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1}$  est prolongeable par continuité en une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 4**

Soit  $(b, c) \in \mathbb{C}^2$ . On note  $(E)$  l'équation différentielle  $y'' + by' + cy = 0$ .

- 1) On suppose que l'équation  $(E)$  admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, que l'on note  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Etablir une relation de récurrence sur les  $a_n$ .
- 2) Déterminer alors toutes les suites vérifiant la relation de récurrence établie ci-dessus pour  $c = -b - 1$ .

**Exercice 5**

Soit une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ . On note  $f$  la somme de la série.

- 1) Dans cette question, on suppose que les  $a_n$  sont des réels positifs, que  $R = 1$  et que  $f$  est bornée sur  $]0; 1[$ .
  - a. Montrer que la série numérique  $\sum a_n$  converge et que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n$ .
  - b. Ce résultat subsiste-t-il quand les  $a_n$  sont de signe quelconque ?
- 2) Dans cette question, on veut prouver le Théorème d'Abel qui dit que :

Si la série numérique  $\sum a_n R^n$  converge, alors  $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ .

- a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où  $R = 1$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$ .

Dans la suite, on suppose que les deux conditions ci-dessus sont réalisées.

- b. On pose  $S_{-1} = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Montrer que pour tout  $x \in ]0; 1[$  et tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^N S_n (x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}.$$

- c. En déduire que pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$  et conclure.

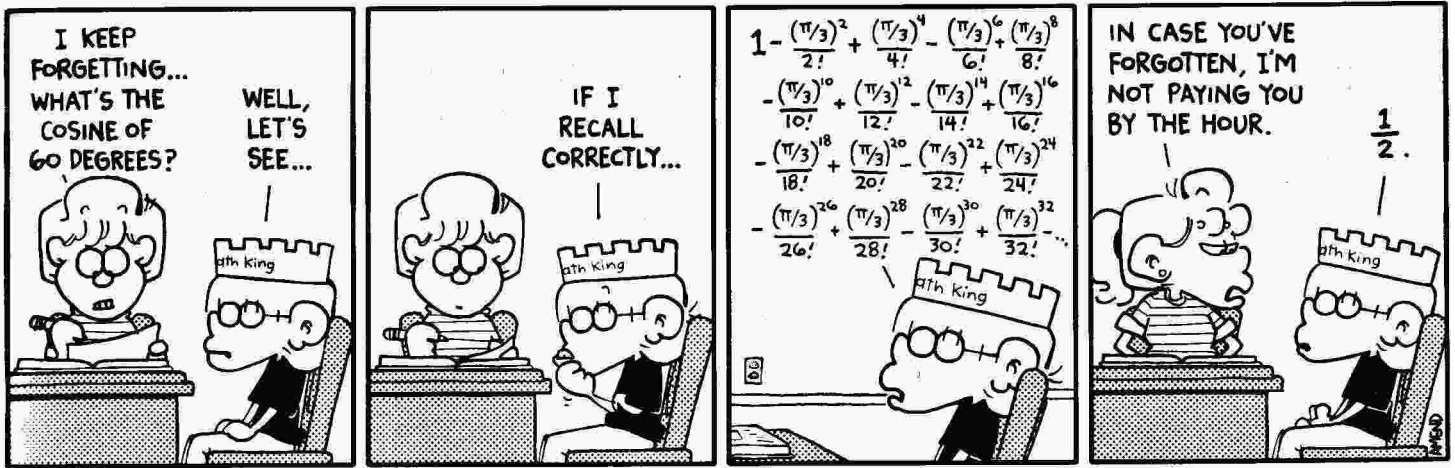
**Exercice 6**

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière réelle de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

- 1) On suppose que  $a_0 = 1$ .
  - a. Prouver qu'il existe une unique suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $c_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = 0$ .
  - b. Soit  $r \in ]0; R[$ . Justifier qu'il existe un réel  $M > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|a_n r^n| \leq M$ .  
Les réels  $r$  et  $M$  ainsi fixés, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|c_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$ .
  - c. En déduire que  $\sum c_n x^n$  a un rayon de convergence non nul. Que conclure ?
- 2) Soit  $\sum b_n x^n$  une autre série entière réelle de rayon de convergence 1 et de somme  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ .

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n > 0$ , que la série  $\sum b_n$  diverge, et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$ .

Montrer que  $g(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow 1^-$ , puis que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ .



**Exercice 8 (Mines)**

Calculer le rayon de convergence et la somme de  $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$ .

**Exercice 9 (Centrale)**

Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que  $n = o(p_n)$ . On pose  $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^{p_n}$ .

- 1) Donner le rayon de convergence de la série entière  $\sum x^{p_n}$ .
- 2) Déterminer la limite de  $f$  en  $1^-$ .
- 3) Etudier la limite de  $(1-x)f(x)$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures.

