

Corrigé du DM n° 2

On a $p_0 = q_0 = S_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Si } S_n > x : \begin{cases} p_{n+1} = p_n \\ q_{n+1} = q_n + 1 \\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 \end{cases} ; \quad \text{si } S_n \leq x : \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 1 \\ q_{n+1} = q_n \\ s_{n+1} = 2p_{n+1} \end{cases}$$

Et :

$$S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} = S_n + \frac{(-1)^{s_{n+1}}}{s_{n+1}} = \begin{cases} S_n - \frac{1}{2q_{n+1} - 1} & \text{quand } S_n > x \\ S_n + \frac{1}{2p_{n+1}} & \text{quand } S_n \leq x \end{cases}$$

I.B. On note $s(n) = s_n$.

Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$ avec de plus, $\text{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = n$.

- Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} S_n > x &\Rightarrow \begin{cases} p_1 = p_0 = 0 \\ q_1 = q_0 + 1 = 1 \\ s_1 = 2q_1 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{s(1)\} = \{2q_1 - 1\} = \{1\} \\ \text{Card}\{s(1)\} = 1 \end{cases} \\ S_n \leq x &\Rightarrow \begin{cases} p_1 = p_0 + 1 = 1 \\ q_1 = q_0 = 0 \\ s_{n+1} = 2p_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{s(1)\} = \{2p_1\} = \{2\} \\ \text{Card}\{s(1)\} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

- On suppose la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{s(1), s(2), \dots, s(n)\} \cup \{s(n+1)\}.$$

Par hypothèse de récurrence $\{s(1), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$ et $\text{Card}\{s(1), \dots, s(n)\} = n$.

De plus :

$$\begin{aligned} S_n > x &\Rightarrow \begin{cases} p_{n+1} = p_n \\ q_{n+1} = q_n + 1 \\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2q_n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{2, 4, \dots, 2p_n\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \\ \{s(n+1)\} = \{2q_{n+1} - 1\} \end{cases} \\ &\Rightarrow \{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \cup \{2q_n + 1\} \\ &= \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1, 2q_n + 1\} \\ &= \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n \leq x &\Rightarrow \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 1 \\ q_{n+1} = q_n \\ s_{n+1} = 2p_{n+1} = 2p_n + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} = \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \\ \{s(n+1)\} = \{2p_{n+1}\} \end{cases} \\
&\Rightarrow \{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \cup \{2p_n + 2\} \\
&= \{2, 4, \dots, 2p_n, 2p_n + 2\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\} \\
&= \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien $\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \{2, 4, \dots, 2p_{n+1}\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_{n+1} - 1\}$ et :

$$\text{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n), s(n+1)\} = \text{Card}\{s(1), \dots, s(n)\} + 1 = n + 1.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après les définitions des suites (p_n) et (q_n) , on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1$. Donc la suite $(p_n + q_n)$ est arithmétique de raison 1. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_n + q_n = n + p_0 + q_0 = n.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)}$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = u_{s(n)}$.

Avec $S_0 = 0$, on obtient par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n u_{s(k)} \Leftrightarrow S_n - S_0 = S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}.$$

Finalement, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\begin{aligned} \{s(1), s(2), \dots, s(n)\} &= \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\} \\ \text{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} &= n \\ p_n + q_n &= n \\ S_n &= u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)} \end{aligned}$
--

Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq n'$. Si $s(n) = s(n')$, alors $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{s(1), s(2), \dots, s(n')\}$ et donc :

$$\text{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \text{Card}\{s(1), s(2), \dots, s(n')\} \Leftrightarrow n = n'.$$

Ceci est absurde, donc $s(n) \neq s(n')$ et ainsi :

s est injective.

I.C.1) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entier convergente vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

On a alors $|a_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Alors, pour tous entiers $n, n' \geq N$, on a :

$$|a_n - a_{n'}| = |a_n - \ell + \ell - a_{n'}| \leq |a_n - \ell| + |a_{n'} - \ell| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Or, si $a_n \neq a_{n'}$, on a $|a_n - a_{n'}| \geq 1$ (car a_n et $a_{n'}$ sont entiers). Ceci est absurde, donc $a_n = a_{n'}$.

Ainsi, $a_n = a_{n'}$ pour tous entiers $n, n' \geq N$, donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.

Ceci prouve que :

Toute suite d'entier convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{n+1} = p_n$ ou $p_n + 1$, donc $p_{n+1} \geq p_n$ et la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Si on suppose qu'elle est majorée, alors elle converge. Or, c'est une suite d'entiers, donc d'après ce qui précède, elle est constante à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a $p_{n+1} = p_n$, donc $S_n > x$, $q_{n+1} = q_n + 1$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n - \frac{1}{2q_{n+1} - 1}$.

Alors, pour tout $k \geq n_0$, on a $q_{k+1} = q_{n_0} + \sum_{k=n_0}^k 1 = q_{n_0} + k + 1 - n_0$ et pour tout $n \geq n_0 + 1$:

$$S_n - S_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{k+1} - 1} \Leftrightarrow S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{k+1} - 1} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k + 2 - 2n_0 - 1}.$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$:

$$S_n > x \text{ et } S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. La série harmonique est divergente, donc $H_n \rightarrow +\infty$.

Or, pour tout $n > n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} \geq \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 2} = \frac{1}{2} \sum_{k=q_{n_0}+1}^{q_{n_0}+n-n_0} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} (H_{q_{n_0}+n-n_0} - H_{q_{n_0}+1}).$$

Par comparaison, on obtient alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (H_{q_{n_0}+n-n_0} - H_{q_{n_0}+1}) = +\infty.$$

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$, ce qui contredit le fait que (S_n) est minorée par x à partir du rang n_0 .

Finalement, supposer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée mène à une contradiction, donc :

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

b) Comme la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, le résultat ci-dessus implique immédiatement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$$

I.C.3) Comme la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est, elle aussi, croissante, si on suppose qu'elle est majorée, on aboutit à $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n > n_0$, $S_n \leq x$ (donc (S_n) est majorée) et :

$$S_n = S_{n_0} + \frac{1}{2} \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{p_{n_0} + k - n_0 + 1} = S_{n_0} + \frac{1}{2} (H_{p_{n_0} + n - n_0} - H_{p_{n_0} + 1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ceci est absurde donc la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée et comme elle est croissante, on a immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty}$$

I.C.4) On a $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2p_N \geq n$ et $2q_N - 1 \geq n$.

Alors :

- soit n est pair et il appartient à $\{2, 4, \dots, 2p_N\}$;
- soit n est impair et il appartient à $\{1, 3, \dots, 2q_N - 1\}$.

Et donc :

$$n \in \{2, 4, \dots, 2p_N\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_N - 1\} = \{s(1), s(2), \dots, s(N)\}.$$

Ainsi, il existe $k \in \llbracket 1, N \rrbracket \subset \mathbb{N}^*$, $s(k) = n$. Ceci prouve que :

$$s : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \text{ est surjective.}$$

Comme on a vu plus haut que s est injective :

$$\boxed{s \text{ réalise une bijection de } \mathbb{N}^* \text{ dans } \mathbb{N}^* .}$$

I.D.1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que montrer que $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|$ ou $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$ revient à montrer que :

$$|S_{n+1} - x| \leq M_n = \max(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|).$$

On a :

$$S_{n+1} - x = S_n - x + (-1)^{s(n+1)} |u_{s(n+1)}|.$$

- Si $S_n > x$, alors $|S_n - x| = S_n - x$ et $s(n+1) = s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ donc :

$$S_{n+1} - x = |S_n - x| - |u_{s(n+1)}| \Rightarrow -M_n \leq -|u_{s(n+1)}| \leq S_{n+1} - x \leq |S_n - x| \leq M_n \Rightarrow |S_{n+1} - x| \leq M_n.$$

- Si $S_n \leq x$, alors $|S_n - x| = x - S_n$ et $s(n+1) = s_{n+1} = 2p_{n+1}$ donc :

$$S_{n+1} - x = -|S_n - x| + |u_{s(n+1)}| \Rightarrow -M_n \leq -|S_n - x| \leq S_{n+1} - x \leq |u_{s(n+1)}| \leq M_n \Rightarrow |S_{n+1} - x| \leq M_n.$$

Finalement, on a bien $|S_{n+1} - x| \leq M_n = \max(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|)$ dans les deux cas, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \text{ ou } |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|}$$

I.D.2) On veut : $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N, |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N, |S_{n+1} - x| > |u_{s(n+1)}|$.

D'après la question précédente, ceci implique que pour tout $n > N$, on a :

$$|u_{s(n+1)}| < |S_{n+1} - x| \leq |S_n - x|.$$

La question précédente permet aussi de distinguer deux cas.

- Si $S_n > x$, alors $-|u_{s(n+1)}| \leq S_{n+1} - x \leq S_n - x$ avec $|u_{s(n+1)}| < |S_{n+1} - x|$.

Ceci permet de conclure que $S_{n+1} > x$, car sinon on aurait $|S_{n+1} - x| = -(S_{n+1} - x)$, donc $|u_{s(n+1)}| < |S_{n+1} - x|$ donnerait $-|u_{s(n+1)}| > S_{n+1} - x$, qui est absurde.

Ceci montre que dans ce cas, la suite $(S_n)_{n > N}$ est décroissante et minorée par x , donc convergente.

Or, si $S_n > x$ pour tout $n > N$, on a, pour tout $n > N$, $q_{n+1} = q_n + 1$, donc $q_{n+1} = q_{N+1} + n - N$, et :

$$u_{s(n+1)} = u_{2q_{n+1}-1} = u_{2n+2q_{N+1}-2N-1} = -\frac{1}{2n+Q}$$

$$S_{n+1} = S_{N+1} + \sum_{k=N+1}^n u_{s(k+1)} = S_{N+1} - \sum_{k=N+1}^n \frac{1}{2k+Q}$$

avec $Q = 2q_{N+1} - 2N - 1$.

Comme on l'a vu plus haut, on a alors $S_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, ce qui est absurde.

- Si $S_n \leq x$, alors $S_n - x \leq S_{n+1} - x \leq |u_{s(n+1)}|$ avec $|u_{s(n+1)}| < |S_{n+1} - x|$, donc $S_{n+1} - x \leq 0$, soit $S_{n+1} \leq x$.

Alors, la suite $(S_n)_{n > N}$ est croissante et majorée par x , donc convergente, mais comme ci-dessus, on a pour tout $n > N$, $S_n \leq x$ donc $p_{n+1} = p_n + 1$, soit $p_{n+1} = p_{N+1} + n - N$ et :

$$u_{s(n+1)} = u_{2p_{n+1}} = u_{2n+2p_{N+1}-2N} = \frac{1}{2n+P}$$

$$S_{n+1} = S_{N+1} + \sum_{k=N+1}^n u_{s(k+1)} = S_{N+1} + \sum_{k=N+1}^n \frac{1}{2k+P}$$

avec $P = 2p_{N+1} - 2N$.

Alors $S_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, ce qui est absurde.

Finalement, on aboutit à une absurdité dans tous les cas, et donc on a bien :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N, |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|}.$$

I.D.3) On vu que $p_n \rightarrow +\infty$ et $q_n \rightarrow +\infty$, donc $p_n \geq 1$ à partir d'un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ et $q_n \geq 1$ à partir d'un rang $n_2 \in \mathbb{N}$. En posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a :

$$\boxed{p_n \geq 1 \text{ et } q_n \geq 1 \text{ pour tout entier } n \geq n_0.}$$

I.D.4) Pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$v_{n+1} = \max \left(|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}| \right).$$

Et :

$$\begin{aligned} p_{n+2} \geq p_{n+1} &\Rightarrow |u_{2p_{n+2}}| = \frac{1}{2p_{n+2}} \leq \frac{1}{2p_{n+1}} = |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n \\ q_{n+2} \geq q_{n+1} &\Rightarrow |u_{2q_{n+2}-1}| = \frac{1}{2q_{n+2}-1} \leq \frac{1}{2q_{n+1}-1} = |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n \end{aligned}$$

De plus, d'après la question I.D.1 :

$$|S_{n+1} - x| \leq \max \left(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}| \right).$$

Or, comme $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ ou $2p_{n+1}$, on a $|u_{s(n+1)}| = |u_{2q_{n+1}-1}|$ ou $|u_{2p_{n+1}}|$, d'où :

$$|u_{s(n+1)}| \leq \max \left(|u_{2q_{n+1}-1}|, |u_{2p_{n+1}}| \right).$$

Donc :

$$|S_{n+1} - x| \leq \max \left(|S_n - x|, \max \left(|u_{2q_{n+1}-1}|, |u_{2p_{n+1}}| \right) \right) = \max \left(|S_n - x|, |u_{2q_{n+1}-1}|, |u_{2p_{n+1}}| \right) = v_n.$$

Finalement, $|S_{n+1} - x|$, $|u_{2p_{n+2}}|$ et $|u_{2q_{n+2}-1}|$ sont tous les trois inférieurs à v_n , donc leur maximum l'est aussi, soit :

$$v_{n+1} \leq v_n.$$

Et donc :

La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - x| \geq 0$, $|u_{2q_{n+1}-1}| \geq 0$ et $|u_{2p_{n+1}}| \geq 0$, donc $v_n \geq 0$.

La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

De plus, on a $|u_{2q_{n+1}-1}| = \frac{1}{2q_{n+1}-1} \rightarrow 0$ (car $q_n \rightarrow +\infty$) et $|u_{2p_{n+1}}| = \frac{1}{2p_{n+1}} \rightarrow 0$ (car $p_n \rightarrow +\infty$).

Supposons alors que $v_n \rightarrow \ell > 0$, alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$|u_{2q_{n+1}-1}| < \frac{\ell}{2}, |u_{2p_{n+1}}| < \frac{\ell}{2} \text{ et } v_n > \frac{\ell}{2} \Rightarrow v_n = |S_n - x|.$$

Ainsi, $|S_n - x| \rightarrow \ell > 0$ et pour tout entier $n \geq N$, $v_n = |S_n - x| > \frac{\ell}{2}$.

Or, d'après la question I.D.2, il existe un entier $n > N$ tel que $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$ et $|u_{s(n+1)}| = |u_{2q_{n+1}-1}|$ ou $|u_{2p_{n+1}}|$,

donc $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}| < \frac{\ell}{2}$, ce qui est absurde.

Ainsi, ℓ n'est pas strictement positif, donc $\ell = 0$, c'est-à-dire :

La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

I.D.5) Pour tout entier $n \geq n_0$, $v_n = \max(|S_n - x|, |u_{2q_{n+1}-1}|, |u_{2p_{n+1}}|)$, donc :

$$|S_n - x| \leq v_n.$$

Alors, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n - x| = 0$, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^n u_{s(k)} \right] = x$$

Finalement :

$$s \text{ est une bijection de } \mathbb{N}^* \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x.$$

I.E.1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \quad (1)$$

Et, pour $n \geq 2$, en posant $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \Leftrightarrow H_{n+1} - \frac{3}{2} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n - 1$$

Soit pour tout $n \geq 3$, en posant $u_n = H_n - \ln n$:

$$1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq H_n \leq \frac{3}{2} + \ln n - \ln 2 \Rightarrow 0 < 1 - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq u_n \quad (2)$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc minorée.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t}.$$

Et d'après (1), $u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc elle converge vers un réel γ et :

$$u_n = H_n - \ln n = \gamma + o(1).$$

En passant à la limite dans (2), on obtient $0 < 1 - \ln 2 \leq \gamma$ et finalement :

$$\text{Il existe un réel } \gamma > 0 \text{ tel que } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

I.E.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n.$$

Donc, avec le résultat précédent :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = [\ln(2n) + \gamma + o(1)] - \frac{1}{2} [\ln n + \gamma + o(1)] = \ln 2 + \ln n + \gamma - \frac{1}{2} \ln n - \frac{1}{2} \gamma + o(1).$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2} \ln n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma + o(1)}$$

Remarquons que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} H_n = \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma + o(1).$$

I.E.3) Soit n un entier naturel tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, donc $n \geq n_0$ avec n_0 défini dans la question I.D.3.

a) On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_{s(k)} = \sum_{k \in \{s(1), s(2), \dots, s(n)\}} u_k = \sum_{k \in \{2, 4, \dots, 2p_n\}} u_k + \sum_{k \in \{1, 3, \dots, 2q_n-1\}} u_k = \sum_{k=1}^{p_n} u_{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} u_{2k-1} = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{(-1)^{2k}}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1}.$$

Soit :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}}$$

b) D'après les questions I.E.2 et I.E.3.a, et avec $p_n \rightarrow +\infty$ et $q_n \rightarrow +\infty$, on peut écrire :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1} = \left[\frac{1}{2} \ln p_n + \frac{1}{2} \gamma + o(1) \right] - \left[\frac{1}{2} \ln q_n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma + o(1) \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n}{q_n} \right) - \ln 2 + o(1).$$

Et comme, d'après la question I.B, on toujours $p_n + q_n = n$, on obtient bien :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n}{n-p_n} \right) - \ln 2 + o(1)}$$

c) On a vu que $S_n \rightarrow x$, soit $S_n = x + o(1)$, donc :

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n}{n-p_n} \right) - \ln 2 + o(1) = x + o(1) \Leftrightarrow \ln \left(\frac{p_n}{n-p_n} \right) = 2 \ln 2 + 2x + o(1) \Leftrightarrow \frac{p_n}{n-p_n} = e^{2 \ln 2 + 2x + o(1)} = 4e^{2x} e^{o(1)}.$$

Soit :

$$\frac{n-p_n}{p_n} = \frac{n}{p_n} - 1 = \frac{1}{4} e^{-2x} e^{o(1)} \Leftrightarrow \frac{n}{p_n} \rightarrow 1 + \frac{1}{4} e^{-2x}.$$

Comme $1 + \frac{1}{4} e^{-2x} \neq 0$ pour tout réel x , on peut écrire $p_n \sim \frac{n}{1 + \frac{1}{4} e^{-2x}}$, soit :

$$\boxed{p_n \sim \frac{4}{4 + e^{-2x}} n}$$

Avec $q_n = n - p_n$, on a $\frac{q_n}{n} = 1 - \frac{p_n}{n} \rightarrow 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4}e^{-2x}} = \frac{e^{-2x}}{4 + e^{-2x}} \neq 0$, donc :

$$q_n \sim \frac{e^{-2x}}{4 + e^{-2x}} n$$

d) On a :

$$\sum_{k=1}^n |u_{s(k)}| = \sum_{k \in \{s(1), s(2), \dots, s(n)\}} |u_k| = \sum_{k \in \{2, 4, \dots, 2p_n\}} |u_k| + \sum_{k \in \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}} |u_k| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |u_{s(k)}| &= \left[\frac{1}{2} \ln p_n + \frac{1}{2} \gamma + o(1) \right] + \left[\frac{1}{2} \ln q_n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma + o(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\ln p_n + \ln q_n) + \ln 2 + \gamma + o(1) = \ln n + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n q_n}{n} \right) + \ln 2 + \gamma + o(1) \end{aligned}$$

Or, $\frac{p_n q_n}{n} \rightarrow \frac{4}{4 + e^{-2x}} \frac{e^{-2x}}{4 + e^{-2x}} > 0$, donc $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n q_n}{n} \right) + \ln 2 + \gamma + o(1) \rightarrow \frac{4}{4 + e^{-2x}} \frac{e^{-2x}}{4 + e^{-2x}} + \ln 2 + \gamma \in \mathbb{R}$ et ainsi :

$$\sum_{k=1}^n |u_{s(k)}| \sim \ln n.$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k=1}^n |u_k| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \sim \ln n.$$

Alors, $\frac{\sum_{k=1}^n |u_{s(k)}|}{\sum_{k=1}^n |u_k|} \sim 1$, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|} = 1$$