Corrigé du DM n° 3

On a :

$$\mathcal{B}_n = \left\{ A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+),\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 1,\ \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1 \right\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n &= \left\{ M_\sigma = \left((M_\sigma)_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \sigma \in S_n,\ \forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\ (M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ M_\sigma = \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \sigma \in S_n \right\}\end{aligned}$$

où S_n désigne l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans lui-même.

6. Soient $A, B \in \mathcal{B}_n$ avec $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{i,j})$, et $\lambda \in [0,1]$. On a :

- $\lambda \geq 0$, $1-\lambda \geq 0$ et pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,j} \geq 0$ et $B_{i,j} \geq 0$, donc $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda) B_{i,j} \geq 0$;
- pour $j \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j}\right] = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n} B_{i,j} = \lambda + (1-\lambda) = 1$;
- pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j}\right] = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = \lambda + (1-\lambda) = 1$.

Ainsi, $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathcal{B}_n$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est convexe.}}$$

Soit maintenant $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_n^{\mathbb{N}}$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (A_{k,i,j})$ telle que $A_k \to A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{k,i,j} \to A_{i,j}$ et :

- $A_{k,i,j} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{k \to +\infty} A_{k,i,j} = A_{i,j} \geq 0$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{k,i,j} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to +\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{k,i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{k \to +\infty} A_{k,i,j} = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 1$;
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{k,i,j} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to +\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{k,i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lim_{k \to +\infty} A_{k,i,j} = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$.

Ainsi, $A \in \mathcal{B}_n$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est fermée.}}$$

Enfin, pour toute $A_k = (A_{k,i,j}) \in \mathcal{B}_n$, on a pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,j} \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{k,j} = 1$, donc $A_{i,j} \leq 1$.

Ainsi, $\|A\|_\infty = \max\limits_{i,j \in [\![1,n]\!]} |A_{i,j}| = \max\limits_{i,j \in [\![1,n]\!]} A_{i,j} \leq 1$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ est bornée.}}$$

Remarquons enfin que $0_n \notin \mathcal{B}_n$ (la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne ne vaut pas 1), donc :

$$\boxed{\mathcal{B}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

7. Soit $\sigma \in S_n$ et $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$. On a pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$:

- $(M_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} \geq 0$;
- $\sum_{i=1}^{n}(M_\sigma)_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{\sigma(j),\sigma(j)} = 1$;
- $\sum_{j=1}^{n}(M_\sigma)_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(i)} = 1$.

Donc, $M_\sigma \in \mathcal{B}_n$ et ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n}$$

On a $M_{id} = I_n \in \mathcal{P}_n$.

Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$(M_\sigma M_{\sigma'})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(M_\sigma)_{i,k}(M_{\sigma'})_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}\delta_{\sigma'(j),\sigma'(j)} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma\circ\sigma'(j)} = (M_{\sigma\circ\sigma'})_{i,j}.$$

Donc :

$$M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'} \in \mathcal{P}_n.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est stable par produit.

Enfin, pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\sigma^{-1} \in S_n$ et :

$$M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = M_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = M_{id} = I_n.$$

Donc M_σ est inversible avec $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{P}_n$.

Tout ceci prouve que :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{R}).}$$

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} N & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$.

On a $M \in \mathcal{P}_n$ car $M = M_\tau$ où $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ et $\tau(i) = i$ pour $i \geq 3$, et en posant $R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_n = \begin{pmatrix} R & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} \notin \mathcal{P}_n.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ n'est pas convexe.}}$$

8. Soit $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$, $A, B \in \mathcal{B}_n$ avec $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{i,j})$, et $\lambda \in]0,1[$ tels que $M_\sigma = \lambda A + (1-\lambda)B$.

Alors, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.

Alors, si $i \neq \sigma(j)$, $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j} = 0$ ce qui donne $\lambda A_{i,j} = (1-\lambda)B_{i,j} = 0$ car $\lambda A_{i,j} \geq 0$ et $(1-\lambda)B_{i,j} \geq 0$, soit $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$ car $\lambda \neq 0$ et $1-\lambda \neq 0$.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $A_{i,j} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(j)\}$, donc $\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = A_{\sigma(j),j} = 1$.

Alors, pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)} = (M_\sigma)_{i,j}$, soit $A = M_\sigma$.

On obtient de même $B = M_\sigma$ et donc si $M_\sigma = \lambda A + (1-\lambda)B$ avec $\lambda \in]0,1[$, alors $A = B = M_\sigma$, donc :

$$\boxed{\text{Toute matrice } M_\sigma \text{ de } \mathcal{P}_n \text{ est extrémale dans } \mathcal{B}_n.}$$

9. On a $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{B}_n$ avec $A \notin \mathcal{P}_n$.

Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de A et $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (E_k est donc le vecteur colonne $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 0, sauf le $k^{\text{ième}}$ qui vaut 1).

Comme $A \notin \mathcal{P}_n$, il existe une colonne de A qui n'est pas un vecteur E_k. Notons j_1 le plus petit indice j tel que la colonne C_j ne soit pas un vecteur E_k, soit $j_1 = \min\{j \in [\![1,n]\!] \setminus C_j \notin \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}\}$.

La colonne C_j ne contient alors aucun 1 (elle la somme de ses coefficients vaut 1), elle il existe $i_1 \in [\![1,n]\!]$ tel que $A_{i_1,j_1} \in]0,1[$.

Comme $\sum_{j=1}^{n} A_{i_1,j} = 1$, il existe $j_2 \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_1\}$ tel que $A_{i_1,j_2} \in]0,1[$.

Et comme $\sum_{i=1}^{n} A_{i,j_2} = 1$, il existe $i_2 \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_1\}$ tel que $A_{i_2,j_2} \in]0,1[$.

De nouveau, comme $\sum_{j=1}^{n} A_{i_2,j} = 1$, il existe $j_3 \in [\![1,n]\!] \setminus \{j_2\}$ tel que $A_{i_2,j_3} \in]0,1[$.

Si $j_3 = j_1$ (schéma ci-dessous), alors on arrête le raisonnement en prenant $r = 2$.

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & A_{i_2,j_1} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & A_{i_1,j_1} & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Si $j_3 \neq j_1$ (et $j_3 \neq j_2$), alors on recommence : comme $\sum_{i=1}^{n} A_{i,j_3} = 1$, il existe $i_3 \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_2\}$ tel que $A_{i_3,j_3} \in]0,1[$.

Si $i_3 = i_1$ (schéma ci-dessous), alors on « oublie » A_{i_1,j_1}, on renumérote j_3 en j_1, on arrête le raisonnement en prenant $r = 2$.

$$\begin{pmatrix} & & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & A_{i_2,j_3} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & \cancel{A_{i_1,j_1}} & \rightarrow & A_{i_1,j_3} & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & A_{i_2,j_1} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & \times & \rightarrow & A_{i_1,j_1} & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Si $i_3 \neq i_1$ et $i_3 \neq i_2$ (schéma ci-dessous), on recommence.

$$\begin{pmatrix} & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & A_{i_2,j_3} & \leftarrow & A_{i_2,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & \uparrow & \\ \cdots & A_{i_1,j_1} & \rightarrow & \downarrow & \rightarrow & A_{i_1,j_2} & \cdots \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & A_{i_1,j_3} & & & \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

On construit donc deux familles $\{i_1, i_2, ...\}$ et $\{j_1, j_2, ...\}$ d'entiers compris entre 1 et n et distincts deux à deux (dans chaque famille). Comme le nombre de lignes et de colonnes possibles est fini, on arrive systématiquement au cas où $j_{r+1} = j_1$ (et on s'arrête), ou au cas où $i_{s+1} = i_1$ (et on laisse A_{i_1,j_1} et on renumérote les indices comme plus haut).

10. Remarquons que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{k=1}^{n} B_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} = 0$.

Soit $\mu = \min\left\{A_{i_k,j_k}, A_{i_k,j_{k+1}}, k \in [\![1,r]\!]\right\}$. Comme pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $A_{i_k,j_k}, A_{i_k,j_{k+1}} \in]0,1[$, on a $\mu \in]0,1[$.

Posons alors $M = A - \mu B$ et $N = A + \mu B$. On a pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{i,k} - \mu B_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} - \mu \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} = 1 - \mu \times 0 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{k,j} - \mu B_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} - \mu \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} = 1 - \mu \times 0 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} N_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{i,k} + \mu B_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} + \mu \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} = 1 + \mu \times 0 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} N_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\left(A_{k,j} + \mu B_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} + \mu \sum_{k=1}^{n} B_{k,j} = 1 + \mu \times 0 = 1$$

$$M_{i,j} = A_{i,j} - \mu B_{i,j} = \begin{cases} A_{i_k,j_k} - \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i_k,j_{k+1}} + \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i,j} \geq 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

$$N_{i,j} = A_{i,j} + \mu B_{i,j} = \begin{cases} A_{i_k,j_k} + \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i_k,j_{k+1}} - \mu \geq 0 & k \in [\![1,r]\!] \\ A_{i,j} \geq 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Ainsi, $M, N \in \mathcal{B}_n$.

De plus, $\mu \neq 0$ et $B \neq 0_n$, donc $M \neq A$ et $N \neq A$, et :

$$\frac{1}{2}M + \left(1 - \frac{1}{2}\right)N = \frac{1}{2}(M + N) = \frac{1}{2}(A - \mu B + A + \mu B) = A.$$

Ainsi, nous avons construit deux matrices M et N de $\mathcal{B}_n$, distinctes de A et telles que $\frac{1}{2}M + \left(1 - \frac{1}{2}\right)N = A$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{A \text{ n'est pas un élément extrémal de } \mathcal{B}_n.}$$

On a vu dans la question 8 que toute matrice de $\mathcal{P}_n$ est extrémale dans $\mathcal{B}_n$ et on vient de voir que toute matrice de $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{P}_n$ n'est pas extrémale dans $\mathcal{B}_n$, donc :

$$\boxed{\text{Les éléments extrémaux de } \mathcal{B}_n \text{ sont les matrices de } \mathcal{P}_n.}$$

11. Supposons que A n'admette pas de chemin strictement positif, alors d'après la contraposée du résultat admis, il existe $p \in [\![1,n]\!]$ et une matrice nulle, extraite de A ayant p lignes et $q = n+1-p$ colonnes.

Remarquons que si on change l'ordre des colonnes de A et de ses lignes, la matrice que l'on obtient appartient encore à $\mathcal{B}_n \setminus \mathcal{P}_n$. En ramenant en premier les p lignes et les q colonnes de A contenant les coefficients nuls, on obtient une matrice de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{1,q+1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_{p,q+1} & \cdots & B_{p,n} \\ B_{p+1,1} & \cdots & \cdots & B_{p+1,q} & B_{p+1,q+1} & \cdots & B_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & \cdots & B_{n,q} & B_{n,q+1} & \cdots & B_{n,n} \end{pmatrix}$$

Avec $B \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{P}_n$.

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} B_{i,k}\right) = \sum_{i=1}^{p} 1 = p \quad \text{et} \quad \sum_{j=q+1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} B_{k,j}\right) = \sum_{j=q+1}^{n} 1 = n-q$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} B_{i,k}\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=q+1}^{n} B_{i,k}\right) = \sum_{k=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{p} B_{i,k} = \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{k=1}^{p} B_{k,j}$$

$$\sum_{j=q+1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} B_{k,j}\right) = \sum_{j=q+1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} B_{k,j} + \sum_{k=p+1}^{n} B_{k,j}\right) = \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{k=1}^{p} B_{k,j} + \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{k=p+1}^{n} B_{k,j}$$

Donc :

$$\sum_{j=q+1}^{n}\sum_{k=p+1}^{n} B_{k,j} = \sum_{j=q+1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} B_{k,j}\right) - \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} B_{i,k}\right) = n-q-p = -1.$$

Ceci est absurde car les $B_{k,j}$ sont tous positifs, donc $\sum_{j=q+1}^{n}\sum_{k=p+1}^{n} B_{k,j} \geq 0$. Ainsi :

$$\boxed{A \text{ n'admette pas de chemin strictement positif.}}$$

12. On a $A_{\sigma(1),1}A_{\sigma(2),2}\dots A_{\sigma(n),n} > 0$, donc $A_{\sigma(j),j} > 0$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda_0 = \min_{j \in [\![1,n]\!]} A_{\sigma(j),j} \in \,]0,1]$.

Si $\lambda_0 = 1$, alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\min_{j \in [\![1,n]\!]} A_{\sigma(j),j} = 1 \leq A_{\sigma(j),j} \leq 1$, donc $A_{\sigma(j),j} = 1$.

Mais alors, $\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 1$ implique $A_{i,j} = 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{\sigma(j)\}$

Alors, on a $A_{i,j}=\delta_{i,\sigma(j)}$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, soit $A=M_\sigma\in\mathcal{P}_n$. Ceci est absurde, donc $\lambda_0\neq 1$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La matrice } A_0=\frac{1}{1-\lambda_0}\left(A-\lambda_0 M_\sigma\right) \text{ est bien définie.}}$$

On a alors $1-\lambda_0>0$ et, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$(A_0)_{i,j}=\frac{1}{1-\lambda_0}\left(A_{i,j}-\lambda_0(M_\sigma)_{i,j}\right)=\frac{1}{1-\lambda_0}\begin{cases}A_{\sigma(j),j}-\lambda_0\geq 0 & \text{si } i=\sigma(j)\\ A_{i,j}\geq 0 & \text{si } i\neq\sigma(j)\end{cases}.$$

De plus :

$$\sum_{k=1}^{n}(A_0)_{i,k}=\frac{1}{1-\lambda_0}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{i,k}-\lambda_0\sum_{k=1}^{n}(M_\sigma)_{i,k}\right)=\frac{1}{1-\lambda_0}(1-\lambda_0)=1$$
$$\sum_{k=1}^{n}(A_0)_{k,j}=\frac{1}{1-\lambda_0}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{k,j}-\lambda_0\sum_{k=1}^{n}(M_\sigma)_{k,j}\right)=\frac{1}{1-\lambda_0}(1-\lambda_0)=1$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } A_0 \text{ est bistochastique.}}$$

De plus, si $i\neq\sigma(j)$, $(A_0)_{i,j}=A_{i,j}$ donc $(A_0)_{i,j}$ et $A_{i,j}$ sont nuls en même temps et $A_{\sigma(j),j}\neq 0$ (car $A_{\sigma(j),j}>0$) alors que $(A_0)_{\sigma(j),j}=\dfrac{1}{1-\lambda_0}\left(A_{\sigma(j),j}-\lambda_0\right)=0$ pour $j=j_0$ tel que $\lambda_0=\min\limits_{j\in[\![1,n]\!]}A_{\sigma(j),j}=A_{\sigma(j_0),j_0}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } A_0 \text{ contient au moins un élément nul de plus que } A.}$$

13. Notons N le nombre de coefficients nuls de $A\in\mathcal{B}_n$.

On a $N\in[\![0,n^2-n]\!]$ avec $N=n^2-n$ si et seulement si $A\in\mathcal{P}_n$ (seuls n coefficients ne sont pas nuls et donc ils valent tous 1).

Montrons alors par récurrence descendante forte sur N que pour tout $N\in[\![0,n^2-n]\!]$ et toute matrice A de $\mathcal{B}_n$ possédant exactement N coefficients nuls, il existe un entier $s\geq 0$, $s+1$ matrices $M_0,M_1,\dots,M_s$ de $\mathcal{P}_n$ et $(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_s)\in\,]0,1[^{s+1}$ tels que $\lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_s=1$ et $A=\lambda_0M_0+\lambda_1M_1+\dots+\lambda_sM_s$.

Initialisation : Pour $N=n^2-n$, alors on a vu que $A=M_0\in\mathcal{P}_n$, $s=0$ et $\lambda_0=1$.

Hérédité : Pour $N\in[\![1,n^2-n]\!]$, on suppose la propriété vraie à tous les rangs compris entre N et n^2-n.

Montrons-là au rang $N-1$.

Soit $A\in\mathcal{B}_n$ possédant exactement $N-1$ coefficients nuls.

La matrice $A_0=\dfrac{1}{1-\lambda_0}\left(A-\lambda_0M_\sigma\right)$ de la question précédente appartient elle aussi à $\mathcal{B}_n$ et possède au moins un coefficient nul de plus que A, donc possède au moins N coefficients nuls. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe un entier $s\geq 0$, $s+1$ matrices $M_1,M_2,\dots,M_{s+1}$ de $\mathcal{P}_n$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{s+1})\in\,]0,1[^{s+1}$ tels que $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{s+1}=1$ et $A_0=\lambda_1M_1+\lambda_2M_2+\dots+\lambda_{s+1}M_{s+1}$.

On a alors :

$$A=\lambda_0 M_\sigma+(1-\lambda_0)A_0=\lambda_0 M_\sigma+(1-\lambda_0)\lambda_1 M_1+(1-\lambda_0)\lambda_2 M_2+\ldots+(1-\lambda_0)\lambda_{s+1}M_{s+1}.$$

Avec :

- $\lambda_0\in\,]0,1[$, donc $1-\lambda_0\in\,]0,1[$ et $(1-\lambda_0)\lambda_k\in\,]0,1[$ pour tout $k\in[\![1,s+1]\!]$;
- $\lambda_0+(1-\lambda_0)\lambda_1+(1-\lambda_0)\lambda_2+\ldots+(1-\lambda_0)\lambda_{s+1}=\lambda_0+(1-\lambda_0)(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{s+1})=\lambda_0+(1-\lambda_0)=1$;
- $M_\sigma, M_1, M_2, \ldots, M_{s+1}\in\mathcal{P}_n$.

Ainsi, la propriété est vraie au $N-1$.

Finalement la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $N\in[\![0,n^2-n]\!]$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Toute matrice } A \text{ de } \mathcal{B}_n \text{ s'écrit } A=\lambda_0 M_0+\lambda_1 M_1+\ldots+\lambda_s M_s \text{ avec } s\in\mathbb{N},\\ M_0, M_1,\ldots, M_s\in\mathcal{P}_n \text{ et } \lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_s\in\,]0,1[\text{ tels que } \lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_s=1.\end{array}}$$

14. On a $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$, donc φ est linéaire et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ est continue.

Par ailleurs, on a vu que $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{B}_n$ et comme $\mathcal{B}_n$ est bornée, $\mathcal{P}_n$ l'est aussi.

De plus, soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{P}_n$ (avec pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_k=(A_{k,i,j})$) qui converge vers une matrice $A=(A_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a alors, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $A_{k,i,j}\to A_{i,j}$ avec $A_{k,i,j}=0$ ou 1 pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Alors, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $N_{i,j}\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k\geq N_{i,j}$, on a $|A_{k,i,j}-A_{i,j}|\leq\varepsilon$.

En prenant $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tous entiers $k,\ell\geq N$:

$$|A_{k,i,j}-A_{\ell,i,j}|=|A_{k,i,j}-A_{i,j}+A_{i,j}-A_{\ell,i,j}|\leq|A_{k,i,j}-A_{i,j}|+|A_{i,j}-A_{\ell,i,j}|\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Or, $A_{k,i,j}$ et $A_{\ell,i,j}$ valent tous les deux 0 ou 1, donc si $A_{k,i,j}\neq A_{\ell,i,j}$, on a $|A_{k,i,j}-A_{\ell,i,j}|=1$, ce qui est absurde.

Ainsi, $A_{k,i,j}=A_{\ell,i,j}$ pour tout entier $k\geq N_{i,j}$, autrement dit la suite $(A_{k,i,j})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang $N_{i,j}$.

En posant $N=\max\limits_{i,j\in[\![1,n]\!]}N_{i,j}\in\mathbb{N}$, on peut conclure que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang N.

Comme $A_k\to A$, on a $A_N=A$ et donc $A=A_N\in\mathcal{P}_n$.

Nous venons donc de prouver que toute suite de $\mathcal{P}_n$ qui converge, converge dans $\mathcal{P}_n$, donc que $\mathcal{P}_n$ est fermée.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc admet un minimum sur $\mathcal{P}_n$, autrement dit :

$$\boxed{\inf_{M\in\mathcal{P}_n}\varphi(M) \text{ existe (et c'est un minimum).}}$$

On a vu dans la question 6 que $\mathcal{B}_n$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc comme pour $\mathcal{P}_n$:

$$\boxed{\inf_{M\in\mathcal{B}_n}\varphi(M) \text{ existe (et c'est un minimum).}}$$

Posons $m = \min\limits_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$ et $\mu = \inf\limits_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M)$.

Comme $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$, on a : $\underline{m \le \mu}$.

Soit maintenant $A \in \mathcal{B}_n$. D'après la question précédente, on peut écrire $A = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_s M_s$ avec $s \in \mathbb{N}$, $M_0, M_1, \ldots, M_s \in \mathcal{P}_n$ et $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \,]0,1[$ tels que $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1$. On a alors :

$$\varphi(A) = \varphi\big(\lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_s M_s\big) = \lambda_0 \varphi(M_0) + \lambda_1 \varphi(M_1) + \ldots + \lambda_s \varphi(M_s).$$

Et pour tout $k \in [\![0, s]\!]$, $M_k \in \mathcal{P}_n$ donc $\varphi(M_k) \ge \mu$. Comme $\lambda_k > 0$, on a

$$\varphi(A) = \lambda_0 \varphi(M_0) + \lambda_1 \varphi(M_1) + \ldots + \lambda_s \varphi(M_s) \ge \lambda_0 \mu + \lambda_1 \mu + \ldots + \lambda_s \mu = (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_s)\mu.$$

Et comme $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1$, on obtient $\varphi(A) \ge \mu$. Ceci étant vrai pour toute $A \in \mathcal{B}_n$, on : $\underline{m \ge \mu}$.

Ainsi, $m = \mu$ et donc, le minimum de $\varphi(\mathcal{B}_n)$ est celui de $\varphi(\mathcal{P}_n)$, donc est atteint en un matrice de $\mathcal{P}_n$:

$$\boxed{\min_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M) \text{ existe et est atteint en une matrice de permutation.}}$$