Corrigé du DS de n° 2

Exercice

(1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n et v_n sont des fonctions rationnelles définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (les dénominateurs ne s'annulent jamais). Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}$ converge :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ convergent simplement sur } \mathbb{R}.}$$

(2) On prend un réel $a>0$.

(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$u_n'(t) = -\frac{2(t+2\pi n)}{\left[1+(t+2\pi n)^2\right]^2}.$$

Pour tout $t\in[-a,a]$, on a $t+2\pi n \geq -a+2\pi n \geq 0$, soit $u_n'(t)\leq 0$, quand $n\geq N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right)+1$.

Dans ce cas, la fonction u_n est décroissante sur $[-a,a]$, et comme elle est positive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, t\in[-a,a],\ |u_n(t)| = u_n(t) \leq u_n(-a).$$

Ainsi, avec $N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right)+1$:

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\geq N,\ \lim_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).}$$

(b) On a $u_n(-a) = \frac{1}{1+(-a+2\pi n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ converge, donc $\sum u_n(-a)$ converge et comme $\lim_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a)$ à partir d'un certain rang :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge uniformément sur } [-a,a].}$$

On a pour tout $t\in[-a,a]$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|u_n'(t)| = \frac{2|t+2\pi n|}{\left[1+(t+2\pi n)^2\right]^2} \leq \frac{2|t+2\pi n|}{(t+2\pi n)^4} = \frac{2}{|t+2\pi n|^3}.$$

Alors, pour tout $t \in [-a, a]$ et tout $n \geq N$:

$$|u_n'(t)| \leq \frac{2}{(-a+2\pi n)^3}.$$

Comme $\dfrac{2}{(-a+2\pi n)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\pi^3 n^3}$ et $\sum \dfrac{1}{4\pi^3 n^3}$ converge, la série $\sum \dfrac{2}{(-a+2\pi n)^3}$ converge et $\sum u_n'$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[-a, a]$, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n' \text{ converge uniformément sur } [-a, a].}$$

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n\geq 1} u_n + \sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 1} v_n$.

(a) On vient de voir que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n et v_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$;
- $\sum u_n'$ et $\sum v_n'$ convergent uniformément sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$.

Ces hypothèses permettent de conclure que les fonctions $U = \sum_{n\geq 1} u_n$ et $V = \sum_{n\geq 1} v_n$ sont de classe C^1 sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}$.

Comme $F = u_0 + U + V$ est une somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n et v_n, ainsi que la fonction *F*, sont définies sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(-t) = \dfrac{1}{1+(-t)^2} = \dfrac{1}{1+t^2} = u_0(t)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(-t) = \frac{1}{1+(-t+2\pi n)^2} = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2} = v_n(t).$$

On alors $v_n(-t) = u_n(t)$ et :

$$F(-t) = u_0(-t) + \sum_{n\geq 1} u_n(-t) + \sum_{n\geq 1} v_n(-t) = u_0(t) + \sum_{n\geq 1} v_n(t) + \sum_{n\geq 1} u_n(t) = F(t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est paire.}}$$

(c) Comme vu plus haut, les fonctions u_n, v_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et F sont définies sur $\mathbb{R}$ et :

$$t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t + 2\pi \in \mathbb{R}.$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(t+2\pi) = \frac{1}{1+(t+2\pi+2\pi n)^2} = \frac{1}{1+\left(t+2\pi(n+1)\right)^2} = u_{n+1}(t)$$

Et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n(t+2\pi) = \frac{1}{1+(t+2\pi-2\pi n)^2} = \frac{1}{1+\left(t-2\pi(n-1)\right)^2} = v_{n-1}(t).$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F(t+2\pi) &= \sum_{n\geq 0} u_n(t+2\pi) + \sum_{n\geq 1} v_n(t+2\pi) \\ &= \sum_{n\geq 0} u_{n+1}(t) + \sum_{n\geq 1} v_{n-1}(t) \\ &= \sum_{n\geq 1} u_n(t) + \sum_{n\geq 0} v_n(t) \\ &= v_0(t) + \sum_{n\geq 1} u_n(t) + \sum_{n\geq 1} v_n(t) \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(t) = \frac{1}{1+t^2} = v_0(t)$, donc $F(t+2\pi) = u_0(t) + \sum_{n\geq 1} u_n(t) + \sum_{n\geq 1} v_n(t) = F(t)$ et finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

Problème

Partie 1 - *Exemples et contre-exemples*

1) S'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes convergeant uniformément vers h sur $]0,1]$, alors on aurait $\sup_{]0,1]} |P_n - h|$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et tend vers 0 quand n tend vers l'infini).

Or, toute fonction polynôme est bornée sur $]0,1]$ (car continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée sur ce segment) et h n'est pas bornée sur $]0,1]$, donc quelle que soit la fonction polynôme P, $\sup_{]0,1]} |P - h|$ n'existe pas.

Le théorème de Weierstrass s'applique à des fonctions continues sur un *segment* $[a,b]$, et $]0,1]$ n'est pas un segment, donc il n'y a pas contradiction.

2) a. Soit $Q \in \mathcal{P}_N$. Comme $(L_0, L_1, \dots, L_N)$ est une base $\mathcal{P}_N$, il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que :

$$Q = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k L_k \ .$$

Or, pour tous $i, k \in [\![0, N]\!]$, on a $L_k(a_i) = \delta_{i,k}$ donc pour tout $i \in [\![0, N]\!]$:

$$Q(a_i) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k L_k(a_i) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \delta_{i,k} = \alpha_i \ .$$

Et ainsi, pour tout $Q \in \mathcal{P}_N$:

$$\boxed{Q = \sum_{k=0}^{N} Q(a_k) L_k}$$

b. On note $\|\,.\,\|_\infty$ la norme infinie de $C([a,b],\mathbb{R})$ (pour tout $g \in C([a,b],\mathbb{R})$, $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$).

Comme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergea uniformément vers *f*, on a $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a $|P_n(a_k) - f(a_k)| \le \|P_n - f\|_\infty$, donc par le théorème des gendarmes $|P_n(a_k) - f(a_k)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n(a_k) = f(a_k)}$$

c. Pour tout $Q \in \mathcal{P}_N$, on pose $n(Q) = \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)|$.

L'application *n* est définie sur $\mathcal{P}_N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Soient $Q, R \in \mathcal{P}_N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $n(\lambda Q) = \sum_{k=0}^{N} |\lambda Q(a_k)| = \sum_{k=0}^{N} |\lambda||Q(a_k)| = |\lambda| \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)| = |\lambda| n(Q)$.
- $n(Q) = 0 \iff \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)| = 0 \iff \forall\, k \in [\![0, N]\!],\ |Q(a_k)| = 0 \iff \forall\, k \in [\![0, N]\!],\ Q(a_k) = 0$.

  Ainsi, $n(Q) = 0$ si et seulement si Q admet au moins $N+1$ racines distinctes (les a_k) et comme Q est de degré au plus *N*, Q est la fonction nulle.
- $n(Q+R) = \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k) + R(a_k)| \le \sum_{k=0}^{N} \left(|Q(a_k)| + |R(a_k)|\right) \le \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)| + \sum_{k=0}^{N} |R(a_k)| = n(Q) + n(R)$.

Finalement :

$$\boxed{n \text{ est une norme sur } \mathcal{P}_N .}$$

On a pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $|Q(a_k)| \le \| Q \|_\infty = \|Q\|_{N,\infty}$, donc :

$$n(Q) = \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)| \le (N+1)\|Q\|_{N,\infty}.$$

On a $Q = \sum_{k=0}^{N} Q(a_k)L_k$, donc pour tout $x \in [a,b]$:

$$|Q(x)| = \left|\sum_{k=0}^{N} Q(a_k)L_k(x)\right| \le \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)||L_k(x)| \le \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)|\|L_k\|_{N,\infty}.$$

Et en posant $\mu = \max_{k\in[\![0,N]\!]} \|L_k\|_{N,\infty} > 0$, on obtient :

$$|Q(x)| \le \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)|\mu = \mu \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)| = \mu\, n(Q).$$

Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, $|Q(x)| \le \mu\, n(Q)$, donc :

$$\|Q\|_{N,\infty} \le \mu\, n(Q).$$

Finalement :

$$\boxed{\alpha\|\,.\,\|_{N,\infty} \le n \le \beta\|\,.\,\|_{N,\infty} \text{ avec } \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\mu} > 0 \text{ où } \mu = \max_{k\in[\![0,N]\!]} \|L_k\|_{N,\infty} \\ \beta = N+1 > 0 \end{cases}}$$

d. On a vu que pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} P_n(a_k) = f(a_k)$, donc $\lim_{n\to+\infty} |P_n(a_k) - f(a_k)| = 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{N} P_n(a_k)L_k$, donc avec $P = \sum_{k=0}^{N} f(a_k)L_k$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[n(P_n - P)\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=0}^{N} |P_n(a_k) - f(a_k)|\right] = \sum_{k=0}^{N} \lim_{n\to+\infty} |P_n(a_k) - f(a_k)| = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } P = \sum_{k=0}^{N} f(a_k)L_k \text{ dans } \mathcal{P}_N \text{ pour } n.}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_n - P\|_{N,\infty} \le \dfrac{1}{\alpha} n(P_n - P)$ et comme $n(P_n - P) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient $\|P_n - P\|_{N,\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc :

$$\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } P \text{ dans } \mathcal{P}_N.}$$

e. Comme $\|\,.\,\|_{N,\infty}$ est la restriction à $\mathcal{P}_N$ de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ de $C([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\left(\|P_n - P\|_{N,\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right) \Rightarrow \left(\|P_n - P\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right).$$

Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers P dans $C([a,b],\mathbb{R})$ et par unicité de la limite, on obtient $f = P \in \mathcal{P}_N$.

Finalement, toute suite de $\mathcal{P}_N$ qui converge dans $C([a,b],\mathbb{R})$ pour $\|.\|_\infty$, converge dans $\mathcal{P}_N$, donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_N \text{ est une partie fermée de } \left(C([a,b],\mathbb{R}),\|.\|_\infty\right).}$$

3) a. Pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (avec $a<b$), $f\mapsto \sup\limits_{[a,b]}|f|$ est une norme sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

Donc, $f\mapsto \sup\limits_{[-1,0]}|f|$ et $f\mapsto \sup\limits_{[0,1]}|f|$ sont des normes sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

Or, $\left\{f\big|_{[a,b]}, f\in\mathbb{R}[x]\right\}$ est un sous-espace de $C([a,b],\mathbb{R})$, donc $f\mapsto \sup\limits_{[-1,0]}|f|$ et $f\mapsto \sup\limits_{[0,1]}|f|$ restreintes à $\left\{f\big|_{[a,b]}, f\in\mathbb{R}[x]\right\}$ sont des normes sur ce sous-espace, et finalement, comme une fonction polynôme est nulle si et seulement si elle est nulle sur $[-1,0]$ ou sur $[0,1]$:

$$\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont des normes sur } \mathbb{R}[x].}$$

b. La fonction *f* est continue sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$ car polynomiale sur ces deux intervalles.

De plus, $f(0)=0$ et :

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-} x^2 = 0\\ \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} x^3 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = f(0).$$

Donc, *f* est continue en 0 et ainsi, *f* est continue sur $[-1,1]$. On peut donc appliquer le théorème d'approximation de Weierstrass pour conclure que :

$$\boxed{\text{Il existe une suite de fonctions polynômes } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ qui converge uniformément vers } f \text{ sur } [-1,1].}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|P_n - f\|_\infty = 0$ où $\|\ \|_\infty$ est la norme infinie sur $[-1,1]$.

Or, pour tout $x\in[-1,0]$, $|P_n(x)-f(x)| = |P_n(x)-x^2| \le \|P_n - f\|_\infty$, donc $\sup\limits_{x\in[-1,0]}|P_n(x)-x^2| \le \|P_n - f\|_\infty$, soit $N_1(P_n - f_1)\le \|P_n - f\|_\infty$ avec $f_1 : x\mapsto x^2$.

D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N_1(P_n - f_1) = 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } x\mapsto x^2 \text{ dans } \mathbb{R}[x] \text{ muni de la norme } N_1.}$$

On prouve de la même façon que :

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } x\mapsto x^3 \text{ dans } \mathbb{R}[x] \text{ muni de la norme } N_2.}$$

Partie 2 - *Application : un théorème des moments*

4) a. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme . On a :

$$\int_a^b P(x) f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 0 .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour toute fonction polynôme } P\text{, on a } \int_a^b P(x) f(x)\,dx = 0 .}$$

b. *f* est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers *f* sur $[a,b]$.

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle y est bornée et, d'après le résultat admis, $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction $f \times f = f^2$.

Du fait de cette convergence uniforme, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b P_n(x) f(x)\,dx \right] = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} \left[P_n(x) f(x) \right] dx = \int_a^b f(x)^2\,dx .$$

Or, d'après la question précédente, $\int_a^b P_n(x) f(x)\,dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc : $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$.

La fonction f^2 est continue (car *f* l'est) et positive sur $[a,b]$. Comme sont intégrale est nulle, f^2 est nulle sur $[a,b]$ et donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nulle sur } [a,b].}$$

5) On a ici $E = C([a,b],\mathbb{R})$ et $F = \left\{ f\big|_{[a,b]}, f \in \mathbb{R}[x] \right\}$, sous-espace de *E*.

On a :

$$F^{\perp} = \left\{ f \in E, \forall\, P \in F, (f \mid P) = 0 \right\} = \left\{ f \in E, \forall\, P \in \mathbb{R}[x], \int_a^b f(x) P(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Or, on vient de voir que si $f \in E$ vérifie $\int_a^b f(x) P(x)\,dx = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, alors *f* est nulle, donc :

$$\boxed{F^{\perp} = \{0\}}$$

Comme ici $E \neq F$ et $F \oplus F^{\perp} = F$, on a :

$$\boxed{E \neq F \oplus F^{\perp}}$$

Partie 3 - *Exemple via un théorème de Dini*

6) Soit $x \in [0,1]$ fixé.

La fonction g_x est définie et dérivable sur $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ avec $g_x'(t) = 1-t$.

Comme $x \in [0,1]$, on a $I =]-\infty, \sqrt{x}] \subset]-\infty, 1]$. Alors, $g_x'(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$, avec égalité seulement quand $x = t = 1$.

La fonction g_x est donc continue (car dérivable) et strictement croissante sur *I*. Ainsi :

$$g_x\left(\left[0, \sqrt{x}\right]\right) = \left[g_x(0), g_x(\sqrt{x})\right] = \left[\frac{1}{2}x, \sqrt{x}\right] \subset \left[0, \sqrt{x}\right] \quad \text{(car } x \in [0,1]\text{)}.$$

Comme $u_0 = 0 \in \left[0, \sqrt{x}\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous ses termes sont dans $\left[0, \sqrt{x}\right]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g_x(u_n) - u_n = \frac{1}{2}(x - u_n^2)$ et $u_n \in \left[0, \sqrt{x}\right]$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, la suite *u* est croissante et majorée par $\sqrt{x}$, donc elle converge vers une limite $\ell(x) \in \left[0, \sqrt{x}\right]$.

Comme g_x est continue sur $\left[0, \sqrt{x}\right]$, on a :

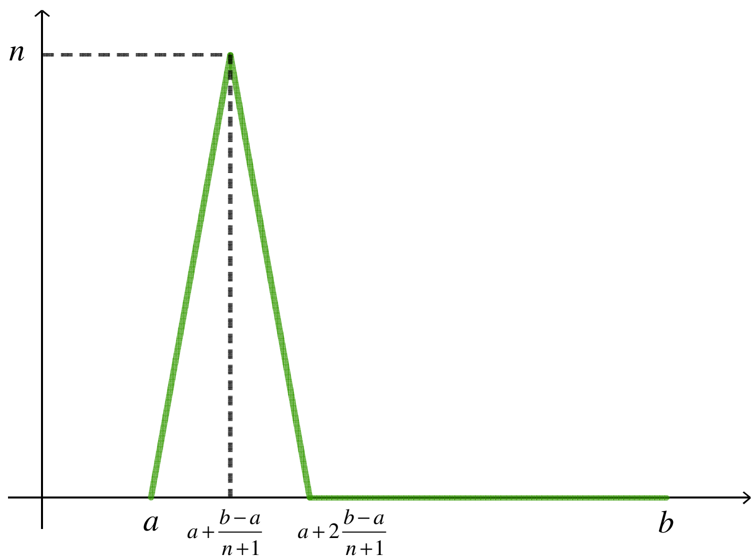
$$g_x\left(\ell(x)\right) = \ell(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ell(x) + \frac{1}{2}\left(x - \ell(x)^2\right) = \ell(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ell(x)^2 = x.$$

Et comme $\ell(x) \geq 0$, on a $\ell(x) = \sqrt{x}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{x}.}$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}$ et la fonction f_n définie sur $[a,b]$, affine par morceaux, telle que sur e schéma ci-dessous :



On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(a)=0$ et pour tout $x \in \left]a,b\right]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $a+2\dfrac{b-a}{n+1} \leq x$ et donc $f_n(x)=0$. Ainsi, pour tout $x \in \left[a,b\right]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)=0$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle qui est continue sur $[a,b]$.

Par contre, $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)\right| = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.

8) a. Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

- On a $P_0 = 0$, qui est polynômiale, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
- On suppose qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

  Alors, $x \mapsto P_n(x)^2$ est polynômiale et il en va de même pour $x \mapsto \dfrac{1}{2}\left(x-P_n(x)^2\right)$. P_{n+1} est alors la somme de deux fonctions polynômiales, donc est polynômiale.

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_n \text{ est une fonction polynômiale.}}$$

b. Soit $x \in [0,1]$. Si on pose $u_n = P_n(x)$, on a $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}(x-u_n^2)$.

Alors, d'après la question 6, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{x}$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers la fonction } h : x \mapsto \sqrt{x}.}$$

c. On vient de voir que, sur sur $[0,1]$, la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$, qui est continue sur $[0,1]$.

De plus, en reprenant les notations ci-dessus, on a vu dans la question 6 que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et donc d'après le résultat admis :

$$\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } h.}$$

Partie 4 - *Démonstration du théorème de Weierstrass*

9) a. Comme S_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$, on a $E(S_n)=nx$ et $V(S_n)=nx(1-x)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n dit que pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(|S_n-E(S_n)|\geq a\right)=P\left(|S_n-nx|\geq a\right)\leq\frac{V(S_n)}{a^2}=\frac{nx(1-x)}{a^2}.$$

En prenant $a=n\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, on a bien $a\in\mathbb{R}_+^*$ (car $n>0$) et :

$$P\left(|S_n-nx|\geq n\alpha\right)\leq\frac{nx(1-x)}{(n\alpha)^2}=\frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Or :

$$x(1-x)=x-x^2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}.$$

Et ainsi, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{P\left(|S_n-nx|\geq n\alpha\right)\leq\frac{1}{4n\alpha^2}}$$

b. On a $\Omega(S_n)=[\![0,n]\!]$, donc $\Omega\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=\left\{f(0),f\left(\frac{1}{n}\right),\ldots,f\left(\frac{k}{n}\right),\ldots,f(1)\right\}$ et :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(\frac{S_n}{n}=\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)P\left(S_n=k\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Soit :

$$\boxed{E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=B_n(f)(x)}$$

10) a. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a $\left(x,\frac{k}{n}\right)\in[0,1]^2$, donc, si $\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha$, on peut écrire :

$$\boxed{\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leq\varepsilon}$$

b. On a :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\leq\sum_{0\leq k\leq n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P\left(S_n=k\right).$$

Et comme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \le \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)| \le \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty .$$

Ainsi :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \le \sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} 2\|f\|_\infty P(S_n = k) = 2\|f\|_\infty \sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} P(S_n = k).$$

Enfin, on a $\left\{k \in [\![0,n]\!],\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha\right\} = \left\{k \in \Omega(S_n),\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha\right\}$ est l'évènement $\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$, donc :

$$\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} P(S_n = k) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

Et ainsi :

$$\boxed{\left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \le 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)}$$

c. On a $\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = 1$, avec $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, donc :

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x)\sum_{k=0}^{n} P(S_n = k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) - \sum_{k=0}^{n} f(x) P(S_n = k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \\
&= \left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) + \sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right|
\end{aligned}$$

Donc :

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \le \left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| + \left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|\le\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right|.$$

D'après la question précédente, on a :

$$\left|\sum_{0\le k\le n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| \le 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

Et, $\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=\left(\left|S_n-nx\right|>n\alpha\right)\subset\left(\left|S_n-nx\right|\geq n\alpha\right)$, donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)\leq P\left(\left|S_n-nx\right|\geq n\alpha\right).$$

D'après la question 9.a, on a $P\left(\left|S_n-nx\right|\geq n\alpha\right)\leq\frac{1}{4n\alpha^2}$, donc :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\,\left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\leq\frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2}=\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

De plus, d'après la question 10.a, on a :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\leq\sum_{0\leq k\leq n,\,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|P\left(S_n=k\right)\leq\sum_{0\leq k\leq n,\,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}\varepsilon P\left(S_n=k\right).$$

Et :

$$\sum_{0\leq k\leq n,\,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}\varepsilon P\left(S_n=k\right)=\varepsilon\sum_{0\leq k\leq n,\,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}P\left(S_n=k\right)\leq\varepsilon\sum_{0\leq k\leq n}P\left(S_n=k\right)=\varepsilon.$$

Donc :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\,\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(S_n=k\right)\right|\leq\varepsilon.$$

Ainsi :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}+\varepsilon.$$

Enfin, si $n\geq\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2\varepsilon}$, on a $\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}\leq\varepsilon$, et :

$$\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, il existe un entier naturel $n_0=E\left(\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2\varepsilon}\right)+1$ tel que :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\geq n_0 \text{ et tout réel } x\in[0,1]\text{, on a } \left|B_n(f)(x)-f(x)\right|\leq 2\varepsilon.}$$

Avec $\|B_n(f)-f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n(f)(x)-f(x)\right|$, nous venons de prouver que :

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_0\in\mathbb{N},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq n_0\Rightarrow\|B_n(f)-f\|_\infty\leq 2\varepsilon.$$

Autrement dit, nous venons de prouver que la suite $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction *f* sur $[0,1]$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n(f)$ est une fonction polynômiale.

Ceci prouve le théorème de Weierstrass :

La fonction continue *f* est limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions polynômiales.