Corrigés des TD du chapitre 7

Exercice 1

En effectuant $C_j \leftarrow C_j - C_n$ pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n-1 & n \\ n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & n \\ 0 & \dots & n & -1 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}_n = (1-n)(2-n)...(-1)n = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)...(1)n .$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_1 = (-1)^{n-1} n!}$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_2 = 1 + (-1)^{n+1}}$$

En effectuant $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$, puis $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, puis $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-3}$, puis … , puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\Delta_3 = D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} - \binom{1}{1} & \binom{2}{1} - 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n-1}{n-1} - \binom{n-2}{n-2} & \dots & \dots & \binom{n-1}{1} - 1 & 1 \\ \binom{n}{n} - \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} - \binom{n-1}{n-2} & \dots & \binom{n}{2} - \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} - 1 \end{vmatrix}_n$$

Avec la formule de Pascal $\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k-1} = \binom{p-1}{k}$ (pour $1 \le k \le p-1$), on obtient :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{1}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ 0 & \binom{n-1}{n-1} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_n$$

Et en développant par rapport à la première colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \binom{n-2}{1} & 1 \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{n-2} & \cdots & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}.$$

Ainsi, $D_n = D_{n-1} = D_{n-2} = ... = D_2 = \begin{vmatrix} \binom{1}{1} & 1 \\ \binom{2}{2} & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$, donc :

$$\boxed{\Delta_3 = 1}$$

Exercice 2

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

En développant par rapport à la première colonne, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$D_n(x) = xD_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1} + \frac{x^3}{3!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ x^{n-1}/(n-1)! & x^{n-2}/(n-2)! & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$- ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ x^2/2! & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ x^{n-2}/(n-2)! & \cdots & x^2/2! & x & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

En développant chacun des déterminants $(n-1)\times(n-1)$ obtenus par rapport à la première ligne plusieurs fois de suite si nécessaire, on obtient, en posant $D_0(x) = 1$:

$$D_n(x) = xD_{n-1}(x) - \frac{x^2}{2!}D_{n-2}(x) + \frac{x^3}{3!}D_{n-3}(x) - ... + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}D_1(x) + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}D_0(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}D_{n-k}(x).$$

On a de plus :

$$D_0(x) = 1 \qquad D_1(x) = x \qquad D_2(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2!} \qquad D_3(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x^2/2! & x & 1 \\ x^3/3! & x^2/2! & x \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3!}.$$

On conjecture alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. On le prouve par récurrence forte sur *n*.

La propriété est vraie au rang $n = 0$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1$. On a alors pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $D_k(x)=\dfrac{x^k}{k!}$ (par hypothèse de récurrence), soit pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $D_{n-k}(x)=\dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}$ (car $n-k\in[\![0,n-1]\!]$) et :

$$D_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}D_{n-k}(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^n}{k!(n-k)!}$$
$$=-\frac{x^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}=-\frac{x^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\frac{x^n}{n!}\left[1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right]=\frac{x^n}{n!}\left[1-(-1+1)^n\right]=\frac{x^n}{n!}$$

La propriété est donc vraie au rang *n*.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Finalement, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{D_n(x)=\frac{x^n}{n!}}$$

Exercice 3

On a toujours :

- $AB\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{Im}AB\subset\operatorname{Im}A$ donc $rg(AB)\le rg(A)\le\min(n,p)$;
- $BA\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ avec $\operatorname{Im}BA\subset\operatorname{Im}B$ donc $rg(BA)\le rg(B)\le\min(n,p)$.

Comme $n\ne p$, on a $n<p$ ou $p<n$.

- Si $p<n$, on a $\min(n,p)=p$ donc $rg(AB)\le p<n$: AB n'est pas inversible et $\det AB=0$.
- Si $n<p$, on a $\min(n,p)=n$ donc $rg(BA)\le n<p$: BA n'est pas inversible et $\det BA=0$.

Ainsi, on a toujours :

$$\boxed{\det AB=0 \text{ ou } \det BA=0.}$$

Exercice 4

Le déterminant d'une matrice est polynômial en chacun de ses coefficients, donc la fonction $f:x\mapsto\det(A+xB)$ est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc entre autres continue sur $\mathbb{R}$.

Or, $f(0)=\det A\ne0$ car A est inversible. Comme f est continue en 0, elle ne s'annule pas au voisinage de 0, autrement dit, il existe un réel $\varepsilon>0$ tel que pour tout $x\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $f(x)=\det(A+xB)\ne0$, ce qui implique que $A+xB$ est inversible. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \varepsilon>0 \text{ tel que pour tout } x\in[-\varepsilon,\varepsilon],\ A+xB\in GL_n(\mathbb{R}).}$$

Exercice 5

1) a. On a :

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & 0_n\\ -C & D^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AD-BC & BD^{-1}\\ CD-DC & I_n\end{pmatrix}.$$

Et comme C et D commutent, on a $CD-DC=0_n$, donc :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right]=\det\begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}=\det(AD-BC)\times\det I_n=\det(AD-BC).$$

Et :

$$\det\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right]=\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\times\det\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}=\det M\times\det D\times\det(D^{-1})=\det M\ .$$

Ainsi :

$$\boxed{\det M=\det\left(AD-BC\right)}$$

b. Posons $f(x)=\det\left(D(x)\right)=\det\left(D+xI_n\right)$. La fonction *f* est polynomiale en *x*.

On a $f(0)=\det D=0$ (car D n'est pas inversible), donc 0 est racine de *f*.

Si *f* admet au moins une autre racine réelle (autre que 0), l'ensemble $R=\left\{z\in\mathbb{R}^*, f(z)=0\right\}$ est non vide et fini, donc on peut poser $\alpha=\min\left\{|z|, z\in R\right\}$. Si *f* n'admet pas de autre racine réelle autre que 0, on peut prendre $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ quelconque. Dans les deux cas, On a alors, pour tout $x\in\,]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$, $f(x)\neq 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } \alpha>0 \text{ tel que pour tout } x\in\,]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\},\ \det\left(D(x)\right)\neq 0.}$$

c. D'après ce qui précède, on a pour tout $x\in\,]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$, $\det\left(D(x)\right)\neq 0$, donc $D(x)$ est inversible.

Or, si C et D commutent, C et $D(x)$ commutent aussi pour tout réel *x* (C et I_n commutent). Alors, d'après la question a., on a, pour tout $x\in\,]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix}=\det\left(AD(x)-BC\right).$$

Or, les deux déterminants ci-dessus sont des fonctions polynomiales en *x*, donc continues en 0 et ainsi :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D(0) \end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\left[\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D(x) \end{pmatrix}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\det\left(AD(x)-BC\right)\right]=\det\left(AD(0)-BC\right).$$

Soit :

$$\boxed{\det M=\det\left(AD-BC\right)}$$

2) a. Comme A et B commutent, on peut utiliser la question précédente :

$$\det N=\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}=\det\left(A^2-B(-B)\right)=\det(A^2+B^2).$$

Posons $Z = A+iB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice $\overline{Z}$ étant la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de Z, on a $\overline{Z} = A - iB$ (car A et B sont deux matrices à coefficients réels).

De plus, l'expression du déterminant d'une matrice étant polynômiale en ses coefficients, on a $\det \overline{Z} = \overline{\det Z}$.

Alors :

$$\det(Z\overline{Z}) = (\det Z)(\det \overline{Z}) = (\det Z)(\overline{\det Z}) = \left|\det Z\right|^2 \geq 0.$$

Or, comme A et B commutent, on a :

$$Z\overline{Z} = (A+iB)(A-iB) = A^2 - i(AB - BA) + B^2 = A^2 + B^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\det N = \det(A^2 + B^2) \geq 0}$$

b. On peut écrire :

$$\det N = \det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \underset{\substack{L_{j+n} \leftarrow L_{j+n} + iL_j \\ j \in [\![1,n]\!]}}{=} \det\begin{pmatrix} A & B \\ -B+iA & A+iB \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ i(A+iB) & A+iB \end{pmatrix}$$

Comme $i(A+iB)$ et $A+iB$ commutent, on peut utiliser la question 1 :

$$\det N = \det\left(A(A+iB) - B\left[i(A+iB)\right]\right) = \det\left((A-iB)(A+iB)\right)$$
$$= \det\left(A-iB\right)\det\left(A+iB\right) = \overline{\det\left(A+iB\right)}\det\left(A+iB\right) = \left|\det\left(A+iB\right)\right|^2 \geq 0$$

Ainsi, même si A et B ne commutent pas :

$$\boxed{\det N \geq 0}$$

3) On a :

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} \quad \textbf{(1)}.$$

$$\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_p & A \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_p & 0_{p,q} \\ -B & BA - xI_q \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}.$$

Alors, avec **(1)**, on a :

$$\det\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} AB - xI_p & -xA \\ 0_{q,p} & -xI_q \end{pmatrix} = \det\left(AB - xI_p\right) \times \det\left(-xI_q\right).$$

Or, $\det\left(-xI_q\right) = (-x)^q$ et $\det\begin{pmatrix} -I_p & 0_{p,q} \\ B & -xI_q \end{pmatrix} = \det\left(-I_p\right) \times \det\left(-xI_q\right) = (-1)^p \times (-x)^q$, donc :

$$\det\left(AB - xI_p\right) \times (-x)^q = \det\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q.$$

De même avec **(2)**, on obtient :

$$\det\left(BA - xI_q\right) \times (-x)^p = \det\begin{pmatrix} xI_p & A \\ B & I_q \end{pmatrix} \times (-1)^p \times (-x)^q.$$

Et ainsi :

$$\boxed{(-x)^q \det\left(AB - xI_p\right) = (-x)^p \det\left(BA - xI_q\right)}$$

4) Considérons deux cas.

<u>*1er cas*</u> : $a = 0$

Alors, $\det M = \det\begin{pmatrix} 0_n & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ et on effectue $L_i \leftrightarrow L_{i+n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Chaque interversion multiplie le déterminant par – 1 et ainsi, on obtient :

$$\det M = (-1)^n \det\begin{pmatrix} cA & dA \\ 0_n & bA \end{pmatrix}.$$

Avec le déterminant par blocs :

$$\det M = (-1)^n \det\left(cA\right)\det\left(bA\right) = (-1)^n c^n \times \det A \times b^n \times \det A = (-bc)^n (\det A)^2 .$$

Et avec $a = 0$, on a $\det B = -bc$, donc :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2 .$$

<u>*2nd cas*</u> : $a \neq 0$

On effectue $L_{i+n} \leftrightarrow L_{i+n} - \dfrac{c}{a} L_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui donne :

$$\det M = \det\begin{pmatrix} aA & bA \\ 0_n & \left(d - \dfrac{c}{a} b\right) A \end{pmatrix}.$$

Alors, à nouveau avec le déterminant par blocs :

$$\det M = \det\left(aA\right)\det\left(\left(d - \frac{c}{a} b\right) A\right) = a^n \times \det A \times \left(d - \frac{c}{a} b\right)^n \times \det A = \left(ad - cb\right)^n (\det A)^2 .$$

Soit, à nouveau :

$$\det M = (\det B)^n (\det A)^2 .$$

Donc, dans tous les cas :

$$\boxed{\det M = (\det B)^n (\det A)^2}$$

Exercice 6

Posons :

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{k-1} & X^k & X^k & \cdots & X^n \\ 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne, on justifie facilement que *P* est un polynôme (en *X*), de degré au plus *n*.

Le coefficient de X^n est, au signe près, un déterminant de Vandermonde :

$$(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{\ k} & a_1^{\ k+1} & \cdots & a_1^{\ n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{\ k} & a_2^{\ k+1} & \cdots & a_2^{\ n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{\ k} & a_n^{\ k+1} & \cdots & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n V_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-1)^n \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i) \neq 0$$

Donc, *P* est de degré *n*.

De plus, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, on a $P(a_\ell) = 0$ (car c'est le déterminant d'une matrice possédant deux lignes identiques). Comme les a_ℓ sont deux à deux distincts, ce sont les *n* racines simples de *P* et ainsi :

$$P(X) = (-1)^n \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)\prod_{\ell=1}^{n}(X - a_\ell).$$

Dans le développement par rapport à la première ligne, le coefficient de X^k est :

$$(-1)^{k+2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{\ k-1} & a_1^{\ k+1} & \cdots & a_1^{\ n} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{\ k-1} & a_2^{\ k+1} & \cdots & a_2^{\ n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{\ k-1} & a_n^{\ k+1} & \cdots & a_n^{\ n} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k$$

Or, si $P(X) = \alpha_n X^n + \ldots + \alpha_k X^k + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0$ (avec *P* scindé, de racines les a_ℓ), on a :

$$\alpha_k = (-1)^{n-k}\alpha_n \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}\le n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{n-k}}\ .$$

Ainsi :

$$(-1)^k\Delta_k = (-1)^{n-k}(-1)^n \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}\le n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{n-k}}\ .$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_k = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n-k}\le n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{n-k}}}$$

Exercice 7

Remarquons que comme la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ contient *n* fonctions, $rg(f_1, f_2, \ldots, f_n) = n$ si et seulement la famille est libre. On veut donc prouver que :

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n) \text{ est libre } \Leftrightarrow \exists\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}\right] \neq 0.$$

Soit par contraposée :

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n) \text{ est liée } \Leftrightarrow \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}\right] = 0.$$

Par ailleurs, pour fixer les idées, notons que :

$$\det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,j\le n}\right] = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n .$$

($\Rightarrow$) On suppose que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0_{\mathbb{R}}$, soit pour tout réel x :

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0.$$

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_1 f_1(x_j) + \lambda_2 f_2(x_j) + \dots + \lambda_n f_n(x_j) = 0$.

Donc :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ \vdots \\ f_1(x_n) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} f_2(x_1) \\ f_2(x_2) \\ \vdots \\ f_2(x_n) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} f_n(x_1) \\ f_n(x_2) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Autrement dit, les colonnes de la matrice $\left(f_j(x_i) \right)_{1 \le i, j \le n}$ sont liées et donc $\det\left[\left(f_j(x_i) \right)_{1 \le i, j \le n} \right] = 0$.

($\Leftarrow$) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det\left[\left(f_1(x) \right) \right] = f_1(x) = 0$, donc $f_1 = 0_{\mathbb{R}}$ et (f_1) est liée.
- On suppose la propriété vraie à un rang n.

  Soit $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\det\left[\left(f_i(x_j) \right)_{1 \le i, j \le n+1} \right] = 0$, soit :

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x_{n+1}) & f_2(x_{n+1}) & \cdots & f_n(x_{n+1}) & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

  Si la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est liée, alors $(f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1})$ aussi.

  Supposons que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\det\left[\left(f_j(x_i) \right)_{1 \le i, j \le n} \right] = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n \neq 0$.

  Par hypothèse, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) & f_{n+1}(x_n) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) & f_{n+1}(x) \end{vmatrix}_{n+1} = 0.$$

  En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$(-1)^{n+2} f_1(x) \begin{vmatrix} f_2(x_1) & f_3(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_1) \\ f_2(x_2) & f_3(x_2) & \cdots & f_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_2(x_n) & f_3(x_n) & \cdots & f_{n+1}(x_n) \end{vmatrix}_n + \dots + (-1)^{n+1+n+1} f_{n+1}(x) \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}_n = 0.$$

Ainsi, si on note λ_k le coefficient de $f_k(x)$ (indépendant de x) dans la relation ci-dessus, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_{n+1} f_{n+1} = 0_{\mathbb{R}}\,.$$

Comme $\lambda_{n+1} = \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,\, j\le n}\right] \neq 0$, les λ_k ne sont pas tous nuls, et ainsi, la famille $\left(f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}\right)$ est liée. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{rg\left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right) = n \quad \Leftrightarrow \quad \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \det\left[\left(f_j(x_i)\right)_{1\le i,\, j\le n}\right] \neq 0}$$

Exercice 8

1) *Version deuxième année :*

Si $A^p = 0_n$, alors la seule valeur propre de A est 0, donc le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^n$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a alors :

$$\boxed{A^n = 0_n}$$

Version première année (très classique) :

Elle fait appel aux images emboitées : $\operatorname{Im} A^{k+1} \subset \operatorname{Im} A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on prouve que si $\operatorname{Im} A^{k+1} = \operatorname{Im} A^k$, alors $\operatorname{Im} A^{k+s} = \operatorname{Im} A^k$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = rg\,(A^{r+k}) = rg\,(A^r) < rg\,(A^{r-1}) < \ldots < rg\,(A) < n\,.$$

Comme $rg\,(A), rg\,(A^{r-1}), \ldots, rg\,(A^r)$ sont r entiers distincts entre 0 et $n-1$, on a $r \le n$ et donc $A^n = 0_n$.

2) On a vu que $\chi_A = X^n$. Or, $\chi_A = \det(X I_n - A)$. En évaluant en – 1, on obtient :

$$\chi_A(-1) = (-1)^n = \det(-I_n - A) = (-1)^n \det(I_n + A)\,.$$

Et donc :

$$\boxed{\det(A + I_n) = 1}$$

3) Si M est inversible, on a :

$$\det(A + M) = \det\left(M(M^{-1}A + I_n)\right) = \det M \,\det(M^{-1}A + I_n)\,.$$

Et comme $MA = AM$, on a :

$$AM^{-1} = M^{-1}MAM^{-1} = M^{-1}AMM^{-1} = M^{-1}A\,.$$

Donc M^{-1} et A commutent et dans ce cas, $(M^{-1}A)^p = (M^{-1})^p A^p = 0_n$.

Alors, d'après la question précédente, $\det(M^{-1}A + I_n) = 1$ et ainsi :

$$\det(A + M) = \det M\,.$$

Si M n'est pas inversible, de rang $r < n$, il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$M = PJQ \text{ avec } J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Alors, si on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \frac{1}{k} I_{n-r} \end{pmatrix}$ et $M_k = PJ_kQ$, on a :

- $J_k \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $M_k \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\det(A+M_k) = \det M_k$;
- $\lim\limits_{k\to+\infty} J_k = J$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = \lim\limits_{k\to+\infty} PJ_kQ = PJQ = M$ (car $N \mapsto PNQ$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Enfin, comme $N \mapsto \det N$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car polynomiale en les coefficients de N), on a :

$$\det(A+M) = \lim_{k\to+\infty} \det(A+M_k) = \lim_{k\to+\infty} \det M_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^{n-r}} = 0.$$

Et comme $\det M = 0$ car M n'est pas inversible, on a à nouveau $\det(A+M) = \det M$.

Finalement, dans tous les cas :

$$\boxed{\det(A+M) = \det M}$$

4) Si pose $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} A' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} M' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$, on a :

- $A'^2 = 0_2$, donc $A^2 = \begin{pmatrix} A'^2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} = 0_n$;
- $A'M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq M'A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$AM = \begin{pmatrix} A'M' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix} \neq MA = \begin{pmatrix} M'A' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}.$$

- $\det M' = 0$, donc $\det M = 0$;
- $\det(A+M) = \det \begin{pmatrix} A'+M' & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} = \det(A'+M') = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, donc :

$$\det(A+M) \neq \det M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le résultat n'est plus vrai si } M \text{ ne commute pas avec } A.}$$

Exercice 9

1) Soit X une vecteur propre de A associé à λ et $C_0 = \left(0_{n,1} \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid X\right)$, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la dernière qui est X. On a :

$$AC_0 - \lambda C_0 = (A - \lambda I_n)C_0 = \left(0_{n,1} \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid (A-\lambda I_n)X\right) = \left(0_{n,1} \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid AX - \lambda X\right) = 0_n.$$

La matrice $B-\lambda I_n$ n'est pas inversible (car λ est valeur propre de *B*), donc l'une de ses lignes L_k est combinaison linéaires des autres, $L_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_i L_i$. Alors, on peut transformer $B-\lambda I_n$:

$$B-\lambda I_n = \begin{pmatrix} & & \\ \cdots & L_k & \cdots \\ & & \end{pmatrix} \xrightarrow[L_k \leftarrow L_k - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_i L_i]{} \begin{pmatrix} & & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & & \end{pmatrix} \xrightarrow{L_k \leftrightarrow L_n} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Réaliser ces deux opérations sur les lignes revient à multiplier $B-\lambda I_n$ à gauche par un produit de matrices d'opérations élémentaires, toutes inversibles, donc à multiplier $B-\lambda I_n$ à gauche par une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

On a donc :

$$P(B-\lambda I_n) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_0 P(B-\lambda I_n) = 0_n .$$

Alors, en posant $C = C_0 P \neq 0_n$ (car $C_0 \neq 0_n$ et *P* inversible), on a :

- $AC - \lambda C = AC_0 P - \lambda C_0 P = (AC_0 - \lambda C_0)P = 0_n P = 0_n$, donc $AC = \lambda C$:
- $CB - \lambda C = C(B-\lambda I_n) = C_0 P(B-\lambda I_n) = 0_n$, donc $CB = \lambda C$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } C \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{, non nulle, telle que } AC = CB = \lambda C .}$$

2) Comme $r = rg\,(C)$, il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$C = PJQ \text{ avec } J = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$AC = CB \iff APJQ = PJQB \iff P^{-1}APJ = JQBQ^{-1} \iff A'J = JB' \text{ avec } \begin{cases} A' = P^{-1}AP \\ B' = QBQ^{-1} \end{cases}$$

Et, si on pose $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, avec $A_1, B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $A_2, B_2 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $A_3, B_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $A_4, B_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, on a :

$$A'J = JB' \iff \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_1 = B_1 \\ B_2 = 0_{r,n-r} \\ A_3 = 0_{n-r,r} \end{cases}$$

Donc :

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_{n-r,r} & A_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{A'} = \chi_{A_1}\chi_{A_4}$$

$$B' = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{r,n-r} \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_{B'} = \chi_{B_1}\chi_{B_4}$$

Et $A_1 = B_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $\chi_{A_1} = \chi_{B_1}$ est un polynôme de degré *r* qui divise $\chi_{A'}$ et $\chi_{B'}$.

Enfin, $A' = P^{-1}AP$ (*resp.* $B' = QBQ^{-1}$), donc A et A' (*resp.* B et B') sont semblables et $\chi_A = \chi_{A'}$ (*resp.* $\chi_B = \chi_{B'}$), et ainsi, $\chi_{A_1} = \chi_{B_1}$ divise χ_A et χ_B.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe un polynôme de degré } r \text{ qui divise à la fois } \chi_A \text{ et } \chi_B.}$$

3) Prenons $r = n$. Dans ce cas, s'il existe un polynôme de degré *n* qui divise à la fois χ_A et χ_B, alors $\chi_A = \chi_B$.

Et s'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $rg\,(C) = n$ et $AC = CB$, alors $C \in GL_n(\mathbb{K})$ et $A = CBC^{-1}$, donc *A* et *B* sont semblables.

Or, deux matrices *A* et *B* peuvent avoir le même polynôme caractéristique sans être semblables, par exemple :

$$A = I_n \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On a ici $\chi_A = \chi_B = (X-1)^n$, mais *A* et *B* ne sont pas semblables car la seule matrice semblable à la matrice identité I_n est elle-même (et $B \neq I_n$).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La réciproque de la question précédente est fausse.}}$$