Corrigés des TD du chapitre 9

Exercice 1

Il est clair que si $k = f'(a)$ alors $c = a$ convient et si $k = f'(b)$, alors $c = b$ convient.

On considère maintenant *k* tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

- Supposons $k = 0$. On a donc $f'(a) < 0 < f'(b)$.

  La fonction *f* est dérivable sur $[a,b]$, donc continue sur $[a,b]$ et comme $[a,b]$ est un segment, *f* admet un minimum atteint en $c \in [a,b]$.

  Mais $f'(a) < 0$ donc $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$. Ceci implique que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$, soit $f(x) < f(a)$, au voisinage de a^+ donc que le minimum de *f* n'est pas atteint en *a* et $c \neq a$.

  De même avec $f'(b) > 0$, on prouve que $c \neq b$.

  Ainsi, *f* atteint un minimum en $c \in \,]a,b[$ donc f' s'annule (et change de signe) en *c*.

- Supposons *k* quelconque tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

  Posons $g(x) = f(x) - kx$.

  La fonction *g* est dérivable sur $[a,b]$ et $g'(x) = f'(x) - k$ donc $g'(a) < 0 < g'(b)$. Ainsi, *g* vérifie les hypothèses du cas précédent, donc il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui revient à $f'(c) = k$.

Finalement, pour tout $k \in \left[f'(a), f'(b)\right]$:

$$\boxed{\text{Il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f'(c) = k.}$$

Exercice 2

1) On a $[x_{n+1}, x_n] \subset \,]0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc *f* est de classe C^1 sur $[x_{n+1}, x_n]$ et on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c_n \in \,]x_{n+1}, x_n[$ tel que $\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(c_n)$ et donc :

$$\left|\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}\right| = \left|f'(c_n)\right| \leq M .$$

Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|f(x_{n+1}) - f(x_n)\right| \leq M \left|x_{n+1} - x_n\right|}$$

Soient maintenant $n, p \in \mathbb{N}$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| \leq M \left|x_{k+1} - x_k\right| = M \left|\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\right| = \frac{M}{2^{k+1}} .$$

Et si $n \geq 1$:

$$\left|f(x_{n+p}) - f(x_p)\right| = \left|\sum_{k=p}^{n+p-1} \left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]\right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}} .$$

Enfin :

$$\sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}} = \frac{M}{2^{p+1}} \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{M}{2^p}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{M}{2^p}.$$

En remarquant que la relation voulue est immédiatement vraie quand $n=0$, on a bien pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|f(x_{n+p}) - f(x_p)\right| \leq \frac{M}{2^p}}$$

2) En prenant $p=0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f(x_n) - f(x_0)\right| = \left|f(x_n) - f(1)\right| \leq M \quad \Rightarrow \quad f(1) - M \leq f(x_n) \leq f(1) + M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } \left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup\limits_{k\geq n} f(x_k)$ est bien défini car $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et $u_n = \max\left(f(x_n), u_{n+1}\right)$, donc :

$$u_n \geq u_{n+1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi et donc :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers une limite finie } L.}$$

4) En intervertissant n et p dans le résultat de la question 1, on a pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\left|f(x_{n+p}) - f(x_n)\right| \leq \dfrac{M}{2^n}$.

On peut récrire cela sous la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \geq n$, $\left|f(x_k) - f(x_n)\right| \leq \dfrac{M}{2^n}$.

En passant au sup sur $k \geq n$, on obtient :

$$\left|\sup_{k\geq n} f(x_k) - f(x_n)\right| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|u_n - f(x_n)\right| \leq \frac{M}{2^n}}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|L - f(x_n)\right| = \left|L - u_n + u_n - f(x_n)\right| \leq \left|L - u_n\right| + \left|u_n - f(x_n)\right| \leq \left|L - u_n\right| + \frac{M}{2^n}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left|L-u_n\right| + \dfrac{M}{2^n}\right) = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L}$$

5) Pour tout $x \in]0,1]$, il existe un unique $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{N_x+1}} < x \leq \dfrac{1}{2^{N_x}}$: $N_x = E\left(-\dfrac{\ln x}{\ln 2}\right)$.

De la même façon que dans la question 1, on prouve qu'il existe $c_x \in \left]x, \dfrac{1}{2^{N_x}}\right[$ tel que :

$$\frac{f(x)-f(x_{N_x})}{x-x_{N_x}} = f'(c_x) \quad \Rightarrow \quad \left|f(x)-f(x_{N_x})\right| = \left|f'(c_x)\right|\left|x-x_{N_x}\right| \leq \left|f'(c_x)\right|\left|x_{N_x+1}-x_{N_x}\right| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}}$$

On a alors :

$$\left|f(x)-L\right| \leq \left|f(x)-f(x_{N_x})\right| + \left|f(x_{N_x})-L\right| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}} + \left|f(x_{N_x})-L\right|.$$

Or, quand $x \to 0^+$, $N_x \to +\infty$ donc $f(x_{N_x}) \to L$ et $\dfrac{M}{2^{N_x+1}} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{M}{2^{N_x+1}} + \left|f(x_{N_x})-L\right|\right) = 0$, ce qui à nouveau grâce au théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = L}$$

Exercice 3

1) Posons $g(x) = \|f(x)\|^2$. Comme f est deux fois dérivable sur I, g l'est aussi avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2\left(f'(x) \mid f(x)\right) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + \left(f''(x) \mid f(x)\right)\right].$$

Or, $\|f\|$ est constante, donc g aussi et ainsi, $g' = g'' = 0$, donc pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + \left(f''(x) \mid f(x)\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(f''(x) \mid f(x)\right) = -\|f'(x)\|^2 \leq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \|f\| \text{ est constante, } \left(f \mid f''\right) \text{ est à valeurs négatives.}}$$

Interprétation cinématique :

Si on pose $f(t) = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = f'(t)$ est la vitesse et $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = f''(t)$ est l'accélération du mobile M.
Si $\|f(t)\| = OM = cste$, le mobile a une trajectoire circulaire.

Dans ce cas, on a $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{v} = 0$, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire et $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{a} \leq 0$ indique que la composante colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ de l'accélération $\vec{a}$ est de sens contraire au vecteur $\overrightarrow{OM}$: cela correspond à la force centripète.

2) Tel qu'indiqué, considérons la fonction $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$, définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Comme f est dérivable sur I, $x \mapsto \|f(x)\|^2$ l'est aussi de dérivée $x \mapsto 2\left(f'(x) \mid f(x)\right)$. Alors, g est dérivable sur I, avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2\left(f'(x) \mid f(x)\right)e^{-2kx} - 2k\|f(x)\|^2 e^{-2kx} = 2\left(\left(f'(x) \mid f(x)\right) - k\|f(x)\|^2\right)e^{-2kx}.$$

Or, on a $\|f'(x)\| \leq k\|f(x)\|$ et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\left|\left(f'(x) \mid f(x)\right)\right| \leq \|f'(x)\|.\|f(x)\| \leq k\|f(x)\|^2 \quad \Rightarrow \quad -k\|f(x)\|^2 \leq \left(f'(x) \mid f(x)\right) \leq k\|f(x)\|^2 \quad \textbf{(1)}.$$

Donc, $g'(x)\le 0$ et g est décroissante sur I.

Si f s'annule en un point $a\in I$, alors $g(a)=\|f(a)\|^2 e^{-2ka}=0$ et ainsi, pour tout $x\in I$ tel que $x\ge a$, on a $g(x)\le g(a)=0$ et comme g est positive, on obtient $g(x)=0$ et donc :

$$f(x)=0 \text{ pour tout } x\in I \text{ tel que } x\ge a.$$

Pour montrer que g est nulle à gauche de a aussi, la double inégalité **(1)**, nous invite à considérer la fonction $h: x\mapsto \|f(x)\|^2 e^{2kx}$, qui comme g, est positive et dérivable sur I, avec pour tout $x\in I$:

$$h'(x)=2\big(f'(x)\mid f(x)\big)e^{2kx}+2k\|f(x)\|^2 e^{2kx}=2\Big(\big(f'(x)\mid f(x)\big)+k\|f(x)\|^2\Big)e^{2kx}.$$

Grâce à **(1)**, on a $h'(x)\ge 0$, donc h est croissante sur I et ainsi, pour tout $x\in I$ tel que $x\le a$, $h(x)\le h(a)=0$, ce qui donne $h(x)=0$ et donc :

$$f(x)=0 \text{ pour tout } x\in I \text{ tel que } x\le a.$$

Finalement, on a $f(x)=0$ pour tout $x\in I$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Si la fonction } f \text{ s'annule en un point de } I, \text{ alors elle est nulle sur } I.}$$

Exercice 4

1) On a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{t}\big[f(t)-f(kt)\big]\right)=\ell$ donc :

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0,\ \forall\,t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\},\ \left\|\frac{1}{t}\big[f(t)-f(kt)\big]-\ell\right\|\le\varepsilon.$$

Or, $k\in\,]0,1[$, donc pour tout $i\in\mathbb{N}$, $0<k^i\le 1$ (égal à 1 pour $i=0$) et pour tout $t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$, on a :

$$0<|t|\le\alpha \;\Rightarrow\; 0<\left|k^i t\right|\le k^i\alpha\le\alpha \;\Rightarrow\; \left\|\frac{1}{k^i t}\big[f(k^i t)-f(kk^i t)\big]-\ell\right\|\le\varepsilon.$$

Et finalement, on a bien :

$$\boxed{\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0,\ \forall\,t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\},\ \forall\,i\in\mathbb{N},\ \left\|\frac{1}{k^i t}\big[f(k^i t)-f(k^{i+1}t)\big]-\ell\right\|\le\varepsilon}$$

2) Avec les notations de la question précédente, on a pour tout $t\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$ et tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\left\|\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{1}{t}\big[f(k^i t)-f(k^{i+1}t)\big]-k^i\ell\right)\right\|\le\sum_{i=0}^{p-1}\left\|\frac{1}{t}\big[f(k^i t)-f(k^{i+1}t)\big]-k^i\ell\right\|\le\sum_{i=0}^{p-1}\varepsilon k^i=\varepsilon\sum_{i=0}^{p-1}k^i.$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{p-1}\left(\frac{1}{t}\big[f(k^i t)-f(k^{i+1}t)\big]-k^i\ell\right)=\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{p-1}\big[f(k^i t)-f(k^{i+1}t)\big]-\left(\sum_{i=0}^{p-1}k^i\right)\ell=\frac{1}{t}\big[f(t)-f(k^p t)\big]-\left(\sum_{i=0}^{p-1}k^i\right)\ell.$$

Avec $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}k^i=\frac{1-k^p}{1-k}$, on obtient :

$$\left\|\frac{1}{t}\big[f(t)-f(k^p t)\big]-\frac{1-k^p}{1-k}\ell\right\|\le\frac{1-k^p}{1-k}\varepsilon.$$

Or, $\lim\limits_{p \to +\infty} k^p = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, donc en passant à la limite quand $p \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus (qui est vraie quel que soit *p*), on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t}\left[f(t) - f(0) \right] - \frac{1}{1-k}\ell \right\| \leq \frac{1}{1-k}\varepsilon .$$

Ainsi, avec $K = \dfrac{1}{1-k} > 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\},\ \left\| \frac{1}{t}\left[f(t) - f(0) \right] - \frac{1}{1-k}\ell \right\| \leq K\varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{t}\left[f(t) - f(0) \right] = \dfrac{1}{1-k}\ell$ et donc que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 avec } f'(0) = \frac{1}{1-k}\ell .}$$

Exercice 5

On se place dans un repère orthonormé du plan d'origine *O*. Dans chaque cas, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe que l'on étudie.

a. $\mathscr{C} : M(t) \begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. La courbe $\mathscr{C}$ est entièrement décrite quand *t* décrit $[-\pi, \pi]$.

- Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont respectivement paire et impaire, donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in [0, \pi]$, $\pi - t \in [0, \pi]$, et on a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) et on peut l'étudier sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a alors pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\sin t \cos 2t \\ y'(t) = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin t \sin 2t \end{cases}$$

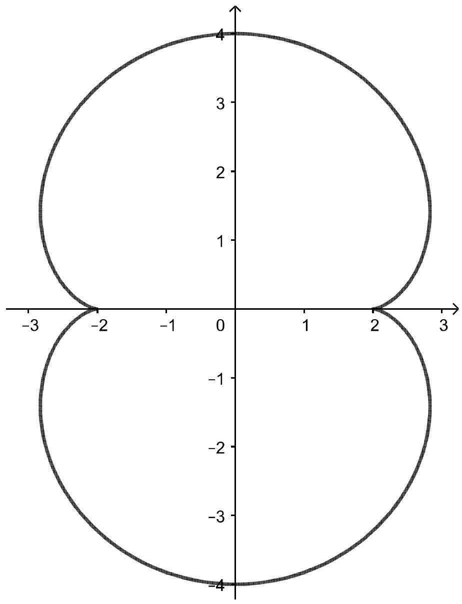
D'où le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	-6
x	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	0
y	0	↗			4
$y'(t)$	0	$+$	$3\sqrt{2}$	$+$	0

Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u}\begin{vmatrix}\cos 2t\\ \sin 2t\end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t=\dfrac{\pi}{4}$, une tangente horizontale quand $t=\dfrac{\pi}{2}$ et $M(0)$, de coordonnées $(2;0)$, est un point de rebroussement de première espèce, avec une demi-tangente horizontale.

Courbe :



b. $\mathscr{C}:M(t)\begin{cases}x(t)=t^3-2t+\dfrac{1}{t}\\ y(t)=t^2-t+\dfrac{1}{t}\end{cases}$

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et pout tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases}x'(t)=3t^2-2-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{3t^4-2t^2-1}{t^2}=\dfrac{(3t^2+1)(t^2-1)}{t^2}\\ y'(t)=2t-1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{2t^3-t^2-1}{t^2}=\dfrac{(2t^2+t+1)(t-1)}{t^2}\end{cases}$$

D'où le tableau :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	-4	$-$	‖	$-$	0	$+$	

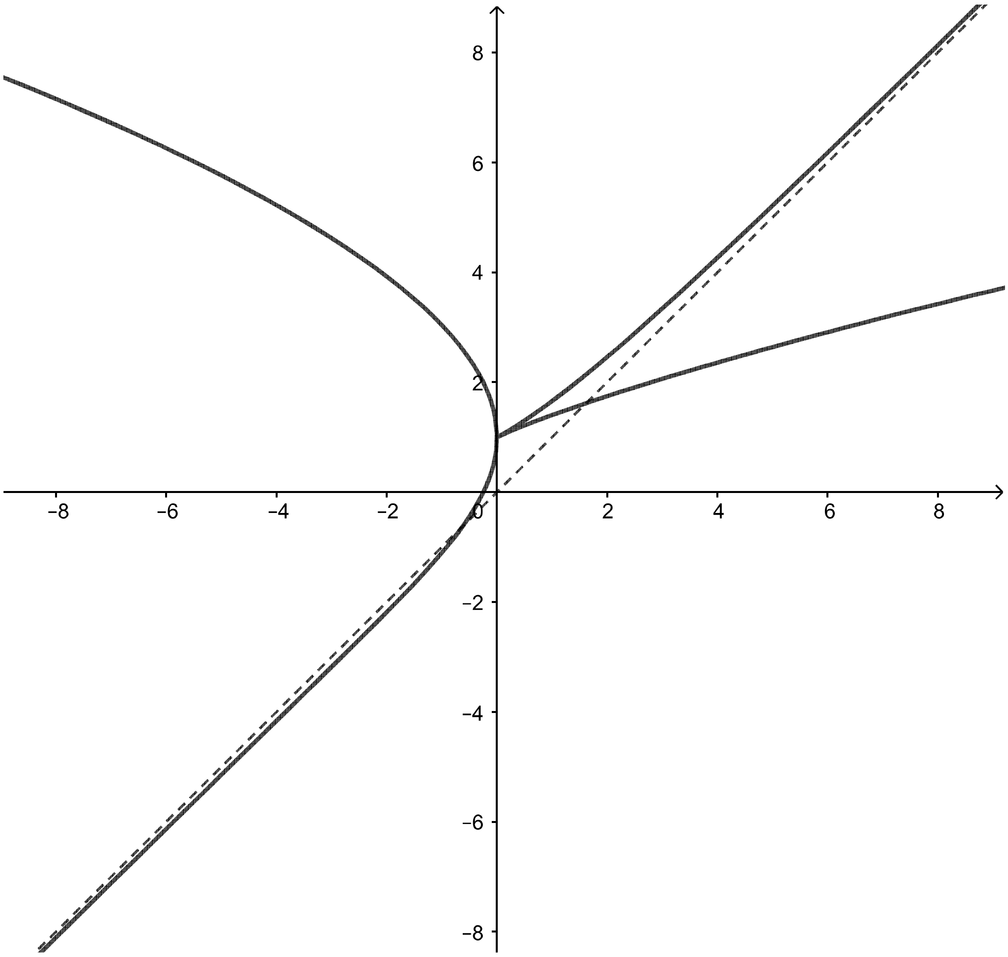
Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u}\begin{vmatrix}(3t^2+1)(t+1)\\ 2t^2+t+1\end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t=-1$ et $M(1)$, de coordonnées $(0;1)$, est un point de rebroussement de $1^{\text{ère}}$ espèce, avec une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(2;1)$.

Branches infinies : Il y en a 4.

- $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{y(t)}{x(t)}=0$, donc il y a une direction asymptotique horizontale quand $t\to-\infty$ et $t\to+\infty$.
- $\lim\limits_{t\to0}\left[y(t)-x(t)\right]=0$, donc la droite d'équation $y=x$ (première bissectrice) est asymptote à $\mathscr{C}$ quand $t\to0^-$ et $t\to0^+$.

Courbe :



c. $\mathscr{C}:M(t)\begin{cases}x(t)=\cos^2 t+\ln(\sin t)\\ y(t)=\sin t\cos t\end{cases}$

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π-périodiques sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]2k\pi,(2k+1)\pi\right[$.

La courbe $\mathscr{C}$ est entièrement décrite quand t décrit $]0,\pi[$.

Pour tout $t\in]0,\pi[$, $\pi-t\in]0,\pi[$, et on a $x(\pi-t)=x(t)$ et $y(\pi-t)=-y(t)$, donc $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a alors pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases}x'(t)=-2\sin t\cos t+\dfrac{\cos t}{\sin t}=\dfrac{\cos t}{\sin t}\cos 2t\\ y'(t)=\cos 2t\end{cases}$$

D'où le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	$+\infty$	$+$	0		0
x	$-\infty$	$\nearrow$	$(1-\ln 2)/2$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0
$y'(t)$	1	$+$	0	$+$	-1

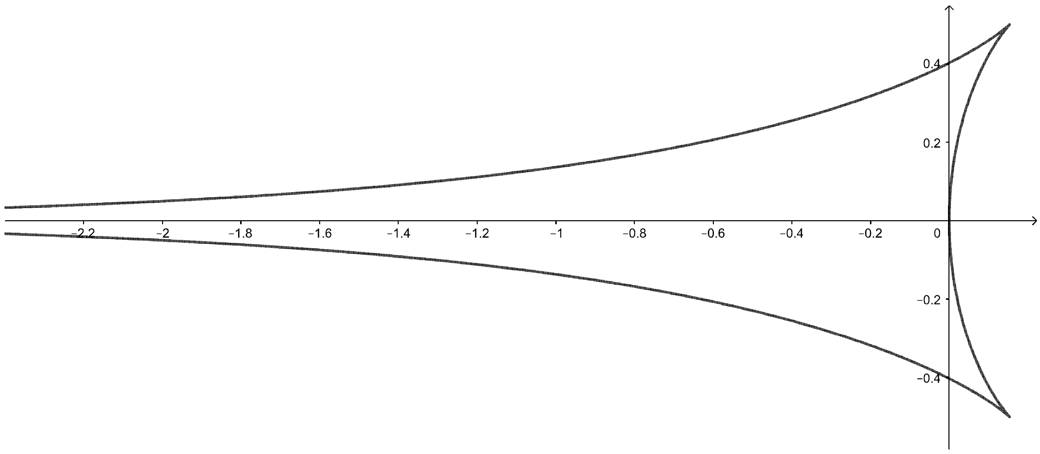
Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u}\begin{vmatrix}\cos t\\ \sin t\end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t=\frac{\pi}{2}$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, de coordonnées $\left(\frac{1-\ln 2}{2};\frac{1}{2}\right)$, est un point de rebroussement de première espèce, avec une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(1;1)$.

Branche infinie :

On a $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t)=-\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t)=0$, donc l'axe (Ox) est asymptote à $\mathscr{C}$ quand $t\to 0^+$.

Courbe :



Exercice 6

1) Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont définies et de classe C^∞ et pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t)=2(t-1)\\ y'(t)=6t(t-1)\end{cases}$$

La tangente à Γ au point $M(t)$ est dirigée par $\vec{u}(t)$ de coordonnées $(1,3t)$. Une équation de cette tangente est alors donnée par :

$$\begin{vmatrix} x-x(t) & 1\\ y-y(t) & 3t\end{vmatrix}=0 \iff 3t\big(x-x(t)\big)-\big(y-y(t)\big)=0 \iff 3tx-y=t^3-3t^2.$$

Soit $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$. Les tangentes à Γ en $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}(t_1)\perp\vec{u}(t_2)$, soit :

$$\vec{u}(t_1).\vec{u}(t_2)=0 \iff 1+9t_1t_2=0 \iff t_1t_2=-\frac{1}{9} \iff t_2=-\frac{1}{9t_1} \text{ avec } t_1\neq 0.$$

Et si $N(x_N, y_N)$ est le point d'intersection des deux tangentes, (x_N, y_N) est solution du système :

$$\begin{cases} 3t_1x_N - y_N = t_1^3 - 3t_1^2 \\ 3t_2x_N - y_N = t_2^3 - 3t_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(t_2 - t_1)x_N = t_2^3 - t_1^3 - 3t_2^2 + 3t_1^2 = (t_2 - t_1)(t_2^2 + t_1t_2 + t_1^2 - 3t_2 - 3t_1) \\ y_N = 3t_1x_N - t_1^3 + 3t_1^2 \end{cases}$$

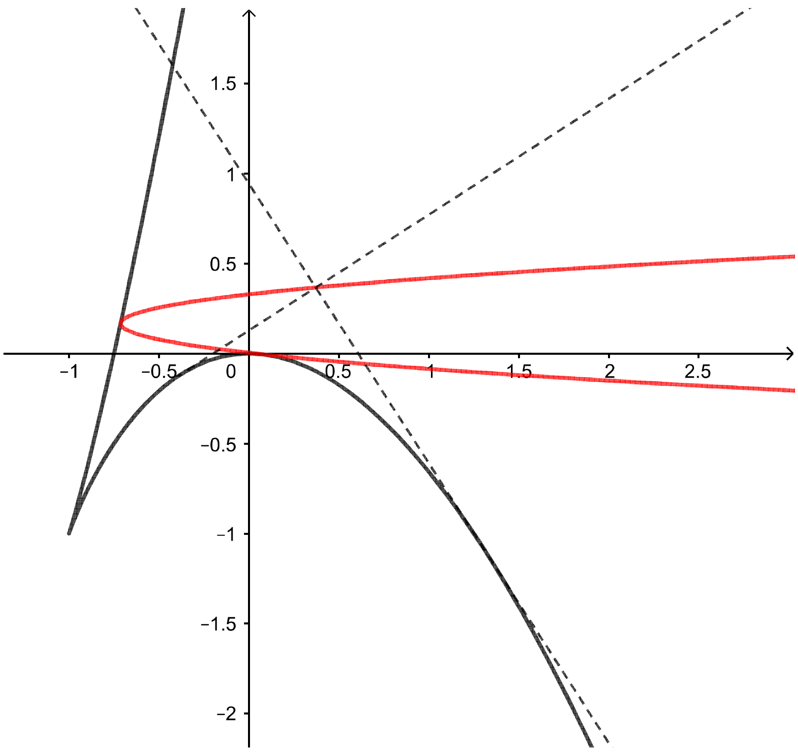
Pour avoir deux tangentes, il faut bien entendu que $t_2 \neq t_1$, donc avec $t_2 = -\dfrac{1}{9t_1}$, on obtient :

$$\begin{cases} x_N = \dfrac{1}{3}(t_2^2 + t_1t_2 + t_1^2 - 3t_2 - 3t_1) = \dfrac{1}{3}\left(t_1^2 - 3t_1 - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3t_1} + \dfrac{1}{81t_1^2}\right) \\ y_N = -\dfrac{1}{9}t_1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{81t_1} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La courbe } C \text{ est paramétrée par } \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}\left(t^2 - 3t - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3t} + \dfrac{1}{81t^2}\right) \\ y(t) = -\dfrac{1}{9}t + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{81t} \end{cases}}$$

On obtient les courbes :



La mémoire disponible est insuffisante pour imprimer ce document.
Essayez une ou plusieurs des opérations suivantes, puis recommencez :

- Choisissez le format d’impression Optimiser pour portabilité.
- Assurez−vous que la valeur de l’option Mémoire PostScript disponible indiquée sur la page Paramèt
- Réduisez le nombre de polices utilisées dans le document.
- Imprimez−le en plusieurs fois.