DS de Mathématiques n° 2

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice (extrait E3A - PSI - 2011)

On considère les suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(t) = \frac{1}{1+(t+2\pi n)^2} \quad \text{et} \quad v_n(t) = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2}$$

Partie A

(1) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et v_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit a un réel strictement positif.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).$$

(b) Montrer que les séries de fonctions de terme général u_n et u'_n convergent uniformément sur $[-a, a]$.

On admettra qu'il en est de même pour les séries de fonctions de terme général v_n et v'_n.

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

(a) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ecrire l'énoncé précis du théorème utilisé.

(b) Démontrer que F est paire.

(c) Démontrer que F est 2π-périodique.

Problème (extrait et adapté - CCP - MP - 2015)

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

On rappelle que si N est une norme sur un espace vectoriel E, alors si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction de N à F est une norme sur F.

Partie 1 - *Exemples et contre-exemples*

1) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\forall\, x\in\,]0,1]$, $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

   Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Ce résultat contredit-il le théorème de Weierstrass ?

2) Soit N entier naturel non nul, on note $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N.

   Soient $(a_0, a_1, \dots, a_N)\in[a,b]^{N+1}$ tel que $a_0<a_1<\dots<a_N$. On pose pour tout $k\in[\![0,N]\!]$:

$$L_k : x\mapsto \frac{\displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{N}(x-a_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{N}(a_k-a_i)}.$$

   On a $L_k\in\mathcal{P}_N$ pour tout $k\in[\![0,N]\!]$ et on admet que $(L_0, L_1, \dots, L_N)$ est une base $\mathcal{P}_N$.

   On munit $C([a,b],\mathbb{R})$, l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, de la norme de la convergence uniforme (la norme infinie sur $[a,b]$, notée $\|\,.\,\|_\infty$).

   L'objet de cette question est de prouver que $\mathcal{P}_N$ est une partie fermée de $\left(C([a,b],\mathbb{R}),\|\,.\,\|_\infty\right)$.

   On considère de plus, une suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}_N$ qui converge uniformément vers une fonction f de $C([a,b],\mathbb{R})$.

   a. Montrer que pour tout $Q\in\mathcal{P}_N$, on a :

$$Q=\sum_{k=0}^{N}Q(a_k)L_k \quad \text{(polynôme d'interpolation de Lagrange).}$$

   b. Prouver que pour tout $k\in[\![0,N]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(a_k)=f(a_k)$.

c. Pour tout $Q \in \mathcal{P}_N$, on pose $n(Q) = \sum_{k=0}^{N} |Q(a_k)|$.

Montrer que n est une norme sur $\mathcal{P}_N$ et déterminer deux réels α et β strictement positifs tels que $\alpha \|\,.\,\|_{N,\infty} \leq n \leq \beta \|\,.\,\|_{N,\infty}$ où $\|\,.\,\|_{N,\infty}$ désigne la restriction à $\mathcal{P}_N$ de $\|\,.\,\|_\infty$, la norme infinie sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

d. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $P = \sum_{k=0}^{N} f(a_k) L_k$ dans $\mathcal{P}_N$ pour n. En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers P dans $\mathcal{P}_N$.

e. Conclure.

3) Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[x]$, telles que pour tout P de $\mathbb{R}[x]$:

$$N_1(P) = \sup_{x\in[-1,0]} |P(x)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|.$$

a. Justifier brièvement que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[x]$.

b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-1,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \in [-1,0] \\ x^3 & \text{pour } x \in [0,1] \end{cases}$$

Justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-1,1]$.

Démontrer que cette suite converge vers $x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{R}[x]$ muni de la norme N_1 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[x]$ muni de la norme N_2.

Partie 2 - *Application : un théorème des moments*

4) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k :

$$\int_a^b x^k f(x)\,dx = 0.$$

Remarque : $\int_a^b x^k f(x)\,dx$ est appelé moment d'ordre k de f sur $[a,b]$.

a. Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\int_a^b P(x) f(x)\,dx$?

b. Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est nulle.

☺ *On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant* :

Si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I, alors la suite de fonctions $(f\,g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f\,g$.

5) *Application*

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini pour tout couple (f,g) d'éléments de E par :

$$(f \mid g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx\,.$$

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes réelles définies sur $[a,b]$ et $F^{\perp}$ l'orthogonal de F.

Déterminer $F^{\perp}$. A-t-on $E=F\oplus F^{\perp}$?

Partie 3 - *Exemple via un théorème de Dini*

6) *Question préliminaire*

Soit $x\in[0,1]$. On note $I=]-\infty,\sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t\in I$, $g_x(t)=t+\dfrac{1}{2}(x-t^2)$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=g_x(u_n)=u_n+\frac{1}{2}(x-u_n^2)\,.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite en fonction du réel x.

7) Proposer un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais pas uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f continue sur $[a,b]$. On pourra s'appuyer sur une représentation graphique précise et propre sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on admettra le résultat suivant.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f, elle-même continue sur $[a,b]$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est-à-dire si pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[a,b]$, $f_n(t)\le f_{n+1}(t)$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

8) *Application* : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie par $P_0(x)=0$ et :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{1}{2}\left(x-P_n(x)^2\right).$$

a. Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale.

b. Justifier que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $h: x\mapsto\sqrt{x}$.

c. Démontrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers h.

Partie 4 - *Démonstration du théorème de Weierstrass*

On se propose de donner dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

Dans toute cette partie, f est une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Soient n est un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$. On pose :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{(polynôme de Bernstein).}$$

9) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

a. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$P\left(|S_n - nx| \geq n\alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

b. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

10) Soit un réel $\varepsilon > 0$. On admet qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$:

$$|a-b| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon.$$

a. Majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$ pour tout entier k compris entre 0 et n, et vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

b. Justifier que :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\ \left|x-\frac{k}{n}\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P\left(S_n = k\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

c. Prouver qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, on a $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.

<u>Quelques rappels de probabilité</u>

<u>Loi binomiale</u> :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, pour tout $k \in \Omega(X) = [\![0,n]\!]$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Et on a $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$.

<u>Inégalité de Bienaymé-Tchebychev</u> :

Si X est une variable aléatoire réelle admettant une variance finie alors, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P\left(|X - E(X)| \geq a\right) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Fin de l'énoncé