TD du chapitre 9 : Dérivation et courbes paramétrées

Exercice 1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(a) < f'(b)$.

Prouver le théorème de Darboux : f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que :

$$\forall\, k \in \left[f'(a), f'(b) \right],\ \exists\, c \in [a,b] \ \backslash \ f'(c) = k .$$

☺ *On pourra commencer par le cas où* $k = 0$ *et montrer qu'alors f admet un minimum sur* $[a,b]$.

Exercice 2

Soit $f \in C^1\left( ]0,1], \mathbb{R} \right)$ telle que f' est bornée sur $]0,1]$. On veut prouver que *f* admet une limite à droite en 0.

On pose $M = \sup\limits_{x \in]0,1]} \left| f'(x) \right|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{2^n}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| f(x_{n+1}) - f(x_n) \right| \leq M \left| x_{n+1} - x_n \right|$, puis que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x_{n+p}) - f(x_p) \right| \leq \frac{M}{2^p} .$$

2) Justifier alors que la suite $\left(f(x_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup\limits_{k \geq n} f(x_k)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie *L*.

4) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| u_n - f(x_n) \right| \leq \dfrac{M}{2^n}$ puis que $\left(f(x_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5) Démontrer alors que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = L$. ☺ *On pourra utiliser la technique de la question 1.*

Exercice 3

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, *E* un espace euclidien et $f : I \to E$

1) On suppose que *f* est deux fois dérivable et que $\|f\|$ est constante.
   Montrer que $\left(f \mid f'' \right)$ est à valeurs négatives. Interprétation cinématique ?

2) On suppose que *f* est dérivable et qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $\left\| f'(x) \right\| \leq k \left\| f(x) \right\|$.
   Montrer que si la fonction *f* s'annule en un point de *I*, alors elle est nulle sur *I*.
   ☺ *On pourra utiliser la fonction* $g : x \mapsto \left\| f(x) \right\|^2 e^{-2kx}$.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to E$, continue en 0 et telle qu'il existe $k \in]0,1[$ et $\ell \in E$ tels que $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} \left[f(t) - f(kt) \right] \right) = \ell$.

1) Montrer que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [-\alpha, \alpha] \backslash \{0\},\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ \left\| \dfrac{1}{k^i t} \left[f(k^i t) - f(k^{i+1} t) \right] - \ell \right\| \leq \varepsilon$.

2) En déduire que *f* est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de *k* et ℓ.

Exercice 5

Etudier et représenter les courbes paramétrées suivantes. Calculer sa longueur totale s'il y a lieu.

a. $\begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$ (*Néphroïde*).

b. $\begin{cases} x(t) = t^3 - 2t + \dfrac{1}{t} \\ y(t) = 2t^3 - \dfrac{7}{2}t^2 + 3t + \dfrac{2}{t} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$

Exercice 6

1) On considère la courbe Γ paramétrée par $M(t) : \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$ dans un repère orthonormé du plan.

   Trouver le lieu C des points N du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à Γ perpendiculaires en N (C est appelée courbe orthoptique à Γ). Tracer Γ et C sur la même figure.

2) Soient $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $a > 0$ et A un point de ce cercle. Déterminer, puis étudier le lieu de l'orthocentre H du triangle OAM lorsque M décrit $\mathscr{C}$. *La courbe obtenue est appelée une strophoïde droite.*

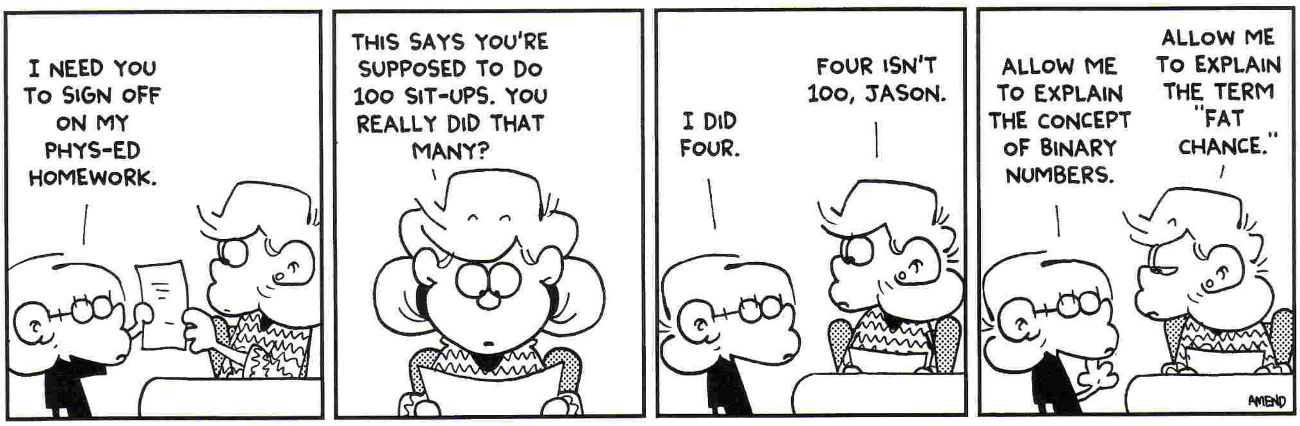
Exercice 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormé , soit $\mathscr{C}$ une courbe régulière de classe C^1. Pour tout point M de $\mathscr{C}$, on appelle T le point d'intersection de l'axe des abscisses (Ox) et de la tangente à $\mathscr{C}$ en M, et H le projeté orthogonal de M sur (Ox). Trouver les courbes $\mathscr{C}$ telles que $HT = a$ où $a > 0$ est fixé.

Exercice 8

Soit $\mathscr{P}$ la parabole du plan d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé.

On considère un point P de $\mathscr{P}$, distinct de l'origine du repère. La normale à $\mathscr{P}$ passant par P recoupe la parabole en un point Q. Déterminer P pour que l'arc de parabole soit de longueur minimale et donner cette longueur.



Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1.

1) Montrer que $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si et seulement si la partie réelle $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ est toujours positive.

2) On suppose que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f'(t)}{f(t)} = a \in \mathbb{R}_-^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 10

Soit $\mathscr{E}$ la courbe plane paramétrée par $f : t \mapsto \left(a\cos t, b\sin t\right)$ où a et b sont deux réels tels que $a > b > 1$ (le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$).

On note $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ et L la longueur de $\mathscr{E}$. La courbe $\mathscr{E}$ est une *ellipse* et la réel e est son *excentricité*.

1) Montrer que $\pi(a+b) \leq L \leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$.
2) Prouver que $L = 2\pi a\left(1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\left[\binom{2n}{n}\frac{e^n}{2^{2n}}\right]^2\right)$.
3) Déterminer l'aire de la surface délimitée par $\mathscr{E}$.