Plus de TD du chapitre 4 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1

Etudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n : x \mapsto \int_0^x e^t \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt\ .$$

Exercice 2

Soit $f \in C\left(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}\right)$ non nulle telle que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$f_n(x) = f(nx) \text{ et } g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right).$$

1) Montrer que, sur $\mathbb{R}_+$, les suites $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent simplement, mais pas uniformément, vers la fonction nulle.
2) Montrer que la suite $\left(f_n g_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

Exercice 3

On pose $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$.

1) Montrer que *f* est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que *f* n'est pas dérivable en 0.
3) Calculer f'', puis f' sans signe somme sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$f(x) = f(1) + \int_1^x \ln(1-e^{-t})\, dt\ .$$

Exercice 4

On pose $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Déterminer le domaine de définition de *f*.
2) Déterminer un équivalent simple de *f* en 0^+.
3) La convergence de $\sum f_n$ est-elle uniforme sur *D* ?

Exercice 5

Soit $f_n : x \mapsto nxe^{-x^2\ln n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Déterminer l'ensemble maximal *D* sur lequel la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement. Y a-t-il convergence uniforme sur *D* ? Donner la partie maximale de *D* sur laquelle la fonction *f* est continue.

Exercice 6

On pose $f(x) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

1) Déterminer le domaine de définition de *f* et étudier la continuité de *f* sur ce domaine.
2) Déterminer un équivalent simple de *f* en 0^+, puis en $+\infty$.

Exercice 7

On pose $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ avec $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+nx}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le domaine de définition de *f* et montrer que *f* est de classe C^∞ sur ce domaine.

☺ *Pour calculer les dérivée successives de* f_n, *remarquer que* $(1+nx) f_n(x) = e^{-nx}$ *et penser à une certaine et mystérieuse formule.*

Exercice 8

On pose $f : x \mapsto \sum_{n \geq 2} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1) Déterminer le domaine de définition de *f*.
2) Montrer que *f* est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
3) Etudier *f* sur $]-1,1[$.
4) Montrer que *f* est développable en série entière sur $]-1,1[$.