Corrigé du DM n° 4

Exercice 1

1. On a $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ et pour toute $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

(a) Pour tout $f \in E$, f' est continue sur $[0,1]$, donc $|f'|$ l'est aussi et $\|f\|$ est défini.

De plus, $|f(0)| \geq 0$ et pour tout $t \in [0,1]$, $|f'(t)| \geq 0$, donc $\int_0^1 |f'(t)|\,dt \geq 0$ et ainsi, $\|f\| \geq 0$.

Ainsi, $\| \ \|$ est définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soient alors $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda f'(t)|\,dt = |\lambda||f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda||f'(t)|\,dt = |\lambda|\left[|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt\right] = |\lambda|\|f\|$.
- $\|f\| = 0$ équivaut à $|f(0)| = \int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0$ (car les deux nombres sont positifs) et comme $|f'|$ est continue et positive sur $[0,1]$, $\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0$ équivaut à $f' = 0$, soit *f* constante.

  Comme $f(0) = 0$, *f* est nulle sur $[0,1]$, donc $\|f\| = 0$ si et seulement si $f = 0$.
- On a $|f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)|$ et, pour tout $t \in [0,1]$, $|(f+g)'(t)| = |f'(t) + g'(t)| \leq |f'(t)| + |g'(t)|$ donc :

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= |f(0)+g(0)| + 2\int_0^1 |(f+g)'(t)|\,dt \leq |f(0)| + |g(0)| + 2\int_0^1 \left(|f'(t)| + |g'(t)|\right)dt \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt + 2\int_0^1 |g'(t)|\,dt = \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\| \ \| \text{ est une norme sur } E.}$$

(b) i. Voir le cours.

ii. Soit $f \in E$. On a :

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \leq 4|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 2\|f\|'$$

$$\|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \leq 2|f(0)| + 4\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 2\|f\|$$

Donc, pour toute $f \in E$, on a $\frac{1}{2}\|f\| \leq \|f\|' \leq 2\|f\|$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\| \ \| \text{ et } \| \ \|' \text{ sont équivalentes sur } E.}$$

2. Pour $f \in E$, posons $N(f) = |f(0)| + 2\|f'\|_\infty$ (où $\| \ \|_\infty$ est la norme infinie usuelle sur $[0,1]$.

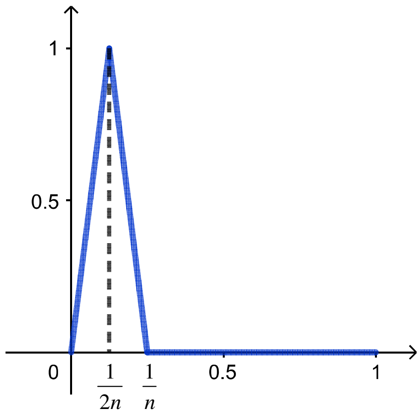
Si $f \in E$, f' est continue sur $[0,1]$, donc N est bien définie sur E et clairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Comme $| \ |$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}_+$ et $C([0,1],\mathbb{R})$ respectivement, on prouve sans mal que N est une norme sur E. De plus, on a immédiatement, pour tout $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\,dt \leq |f(0)| + 2\int_0^1 \|f'\|_\infty\,dt = |f(0)| + 2\|f'\|_\infty = N(f).$$

Donc, $\|f\| \leq N(f)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction g_n, affine par morceaux valant 0 en 0 et sur $\left[\frac{1}{n},1\right]$ et 1 en $\frac{1}{2n}$ telle que sur le schéma ci-dessus :



La fonction g_n est continue sur $[0,1]$. On pose $f_n : x \mapsto \int_0^x g_n(t)\,dt$.

Pour tout $n \geq 2$, $f_n \in E$ et :

$$\left.\begin{array}{l} \|f_n\| = |f_n(0)| + 2\int_0^1 |f_n'(t)|\,dt = 2\int_0^1 g_n(t)\,dt = \dfrac{1}{n} \\ N(f_n) = |f_n(0)| + 2\|f_n'\|_\infty = 2\|g_n\|_\infty = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{N(f_n)}{\|f_n\|} = 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc, $\dfrac{N}{\| \ \|}$ n'est pas majorée sur E et ainsi, N et $\| \ \|$ ne sont pas équivalentes, et donc :

$$\boxed{\text{Toute norme de E n'est pas équivalente à } \| \ \|.}$$

Problème

Dans toute la suite, on note $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$ quand f est bornée sur I.

Partie I

1. (a) Voir le cours.

   (b) On a pour tout $x \in I$, $0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ et ici, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc par comparaison, $\sum |f_n(x)|$ et ainsi :

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge absolument sur } I.}$$

2. Voir le cours.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$:

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} = (-1)^n \frac{x^2}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}.$$

La série $\sum (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$ converge absolument (donc converge) et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ vérifie le critère spéciale des séries alternées, donc converge. Ainsi, $\sum f_n(x)$ est la somme de deux séries convergentes, donc converge et :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge simplement sur } [0,1].}$$

Pour tout $x \in [0,1]$, la suite $\left(|f_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{x^2+n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroit vers 0 et la suite $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left((-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée, la série $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spéciale des séries alternées, donc, si $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k\geq n+1} f_k(x) \right| \leq \left| f_{n+1}(x) \right| = \frac{x^2+n+1}{(n+1)^2} \leq \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

Ainsi, $\sup_{x\in[0,1]} \left| S(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \frac{n+2}{(n+1)^2}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $\left| f_n(x) \right| = \frac{x^2+n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ ne converge absolument en aucune valeur de } [0,1].}$$

4. Soit la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence 1.

Elle converge absolument sur $]-1,1[$, mais, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \sum_{k\geq 0} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k \right| = \left| \sum_{k\geq n+1} x^k \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$

On a $\lim_{x\to 1^-} \left| \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{k=1}^{n} x^k \right| = +\infty$, donc $x \mapsto S(x) - \sum_{k=1}^{n} x^k$ n'est pas bornée sur $]-1,1[$, ce qui implique qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $]-1,1[$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Une série de fonctions } \sum f_n \text{ convergeant absolument sur } I\text{, ne converge pas forcément uniformément.}}$$

Partie II

5. Par hypothèse, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq\alpha_n\leq\alpha_1$ et ainsi :

$$\boxed{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bornée.}}$$

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in I=[0,1[$:

$$|f_n(x)|=f_n(x)=\alpha_n x^n(1-x)\leq\alpha_1 x^n(1-x).$$

La série géométrique $\sum\alpha_1(1-x)x^n$, de raison $x\in[0,1[$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I.}$$

6. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f_n est polynomiale donc dérivable sur *I* et pour tout $x\in I$:

$$f_n'(x)=\alpha_n\left[nx^{n-1}(1-x)-x^n\right]=\alpha_n(n+1)x^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}-x\right).$$

Comme $f_n\geq 0$, la fonction $|f_n|=f_n$ est croissante sur $\left[0,\frac{n}{n+1}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{n}{n+1},1\right[$, donc :

$$\|f_n\|_\infty=\max_{x\in I}|f_n(x)|=f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\alpha_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Soit :

$$\boxed{\|f_n\|_\infty=\frac{\alpha_n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$

(b) On a :

$$\|f_n\|_\infty=\frac{\alpha_n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{\alpha_n}{n+1}e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\alpha_n}{en}.$$

Comme $\sum\|f_n\|_\infty$ est une série à termes positifs, elle converge (c'est-à-dire $\sum f_n$ converge normalement) si et seulement si $\sum\frac{\alpha_n}{en}$ converge. Enfin, $\sum\frac{\alpha_n}{n}$ et $\sum\frac{\alpha_n}{en}$ sont évidemment de même nature, et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge normalement si et seulement si } \sum\frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$$

7. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $x\in I$, $\sum_{k\geq n+1}x^k$ est le reste d'ordre *n* de la série géométrique de raison *x*, donc :

$$\boxed{\sum_{k\geq n+1}x^k=\frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$, on a :

$$\left|\sum_{k\geq 0} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k\geq n+1} f_k(x)\right| = \sum_{k\geq n+1}\left[\alpha_k x^k (1-x)\right]$$

Et comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$ pour tout entier $k \geq n+1$, donc :

$$\left|\sum_{k\geq 0} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k\geq n+1}\left[\alpha_{n+1} x^k (1-x)\right] = \alpha_{n+1}(1-x)\sum_{k\geq n+1} x^k = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}.$$

Donc, $\left\|\sum_{k\geq 0} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_\infty \leq \alpha_{n+1}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} = 0$, on peut conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\sum_{k\geq 0} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k\right\|_\infty = 0.$$

Autrement dit que :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I.}$$

(c) On suppose ici que $\sum f_n$ converge uniformément sur *I*, soit $\left\|\sum_{k\geq n+1} f_k\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, donc minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $\ell - \varepsilon \leq \alpha_n \leq \ell + \varepsilon$.

Si $\ell > 0$, on peut poser Si $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, et pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$, $\frac{\ell}{2} \leq \alpha_n$, donc :

$$\sum_{k\geq n+1} \frac{\ell}{2} x^k (1-x) \leq \sum_{k\geq n+1} \alpha_k x^k (1-x) = \sum_{k\geq n+1} f_k(x) = \left|\sum_{k\geq n+1} f_k(x)\right| \leq \left\|\sum_{k\geq n+1} f_k\right\|_\infty$$

Or, $\sum_{k\geq n+1} \frac{\ell}{2} x^k (1-x) = \frac{\ell}{2} x^{n+1}$, donc pour tout $n \geq N$ et tout $x \in I$, $\frac{\ell}{2} x^{n+1} \leq \left\|\sum_{k\geq n+1} f_k\right\|_\infty$ et en faisant tendre x vers 1, on obtient pour tout $n \geq N$, $\frac{\ell}{2} \leq \left\|\sum_{k\geq n+1} f_k\right\|_\infty$. Ceci est absurde car $\left\|\sum_{k\geq n+1} f_k\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $\ell = 0$, autrement dit :

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers 0.}}$$

8. (a) Si on prend $\alpha_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, et la série $\sum \frac{\alpha_n}{n} = \sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc d'après la question 6.b :

$$\boxed{\text{Avec } \alpha_n = \frac{1}{n}, \text{ la série } \sum f_n \text{ converge normalement sur } I.}$$

(b) Si on prend $\alpha_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, mais ne tend pas vers 0, donc d'après la question 7.c (la contraposée) :

$$\boxed{\text{Avec } \alpha_n = 1\text{, la série } \sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur } I.}$$

(c) Si on prend $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et de limite nulle, donc d'après la question 7.b, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur *I*.

Par contre, on a $\dfrac{\alpha_n}{n} = \dfrac{1}{n\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln n}$ et par comparaison série-intégrale, la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ est de même nature que la suite $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t\ln t}\right)_{n\geq 2}$. Or, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\int_2^n \frac{dt}{t\ln t} = \ln\left(\ln n\right) - \ln\left(\ln 2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty .$$

Donc, $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge et la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur *I*.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Avec } \alpha_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}\text{, la série } \sum f_n \text{ converge uniformément, mais pas normalement sur } I.}$$

9. Finalement, sachant que tous les types de convergence impliquent la convergence simple, on a les implications et les « non-implications » suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lcccc}
CVN & \underset{Q2}{\Rightarrow} & CVU & \Rightarrow & CVS \\
CVN & \underset{Q1a}{\Rightarrow} & CVA & \Rightarrow & CVS \\
CVU & \underset{Q3}{\not\Rightarrow} & CVA & & \\
CVA & \underset{Q4}{\not\Rightarrow} & CVU & &
\end{array}}$$