Corrigé du DM n° 5

Partie I

I.A. Par définition, $UP \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et les suites périodiques et les suites stationnaires appartiennent à UP, donc UP n'est pas vide.

Soient $u, v \in UP$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0, n_1, p, q \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; u_{n+p} = u_n \;\Rightarrow\; \forall\, k \in \mathbb{N},\; u_{n+kp} = u_n \;\Rightarrow\; u_{n+qp} = u_n$;
- $n \geq n_1 \;\Rightarrow\; v_{n+q} = v_n \;\Rightarrow\; \forall\, k \in \mathbb{N},\; v_{n+kq} = v_n \;\Rightarrow\; v_{n+pq} = v_n$.

Alors, en posant $N = \max(n_0, n_1)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$:

$$\lambda u_{n+qp} + \mu v_{n+qp} = \lambda u_n + \mu v_n .$$

Ainsi, $\lambda u + \mu v \in UP$ et UP est stable par combinaisons linéaires.

Finalement :

$$\boxed{UP \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

Par définition, $\mathbb{R}[X]$ est l'espace suites réelles nulles à partir d'un certain rang et $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie. Or, toutes les suites nulles à partir d'un certain rang appartiennent à UP, donc :

$$\boxed{UP \text{ n'est pas de dimension finie.}}$$

I.B. Pour toute $a \in UP$, $\mathscr{P}(a) = \left\{ p \in \mathbb{N}^*,\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \; p\text{-périodique apcr} \right\}$.

I.B.1) Par définition de $a \in UP$, $\mathscr{P}(a) \neq \varnothing$, donc $\mathscr{P}(a)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$: elle admet un plus petit élément $T \geq 1$.

Comme $T = \min \mathscr{P}(a)$, on a $T \in \mathscr{P}(a)$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est T-périodique à partir du rang n_0, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est kT-périodique à partir du même rang.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $kT \in \mathscr{P}(a)$, donc :

$$\left\{ kT,\; k \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \mathscr{P}(a).$$

Réciproquement, soit $p \in \mathscr{P}(a)$ et $p = kT + r$ avec $r \in [\![0, T-1]\!]$ la division euclidienne de p par T.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $a_{n+p} = a_n$.

Alors, pour tout entier $n \geq \max(n_0, N)$, on a $n + r \geq \max(n_0, N)$, donc :

$$a_{n+r} = a_{n+kT+r} = a_{n+p} = a_n .$$

Donc, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est r-périodique à partir du rang $\max(n_0, N)$ et si $r \neq 0$, $r \in \mathscr{P}(a)$, ce qui est absurde car $r < T = \min \mathscr{P}(a)$, donc $r = 0$ et $p = kT$. Ceci prouve que :

$$\mathscr{P}(a) \subset \left\{ kT,\; k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\mathscr{P}(a)=\left\{kT,\ k\in\mathbb{N}^*\right\}}$$

Lorsque $T=1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 1-périodique, c'est-à-dire constante, à partir d'un certain rang, autrement dit :

$$\boxed{\text{Lorsque } T=1 \text{, la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire.}}$$

I.B.2) Comme $T\in\mathscr{P}(a)$, l'ensemble $\left\{q\in\mathbb{N},\ \forall\, n\in\mathbb{N}, n\geq q\Rightarrow a_{n+T}=a_n\right\}$ est non vide. Cet ensemble est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc il admet un plus petit élément et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un plus petit entier } n_0 \text{ tel que : } \forall\, n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow a_{n+T}=a_n.}$$

Soit $p=kT\in\mathscr{P}(a)$ avec $k\in\mathbb{N}^*$. Soit n_1 le plus petit entier à partir duquel la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *p*-périodique.

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *T*-périodique à partir du rang n_0, elle est *kT*-périodique à partir de ce rang, donc : $n_1\leq n_0$.

Soit maintenant $n\geq n_1$. Il existe $\alpha\in\mathbb{N}$ tel que $n+akT\geq n_0$ et :

- $a_{n+akT}=a_n$ car $n\geq n_1$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *kT*-périodique à partir du rang n_1 ;
- $a_{n+akT}=a_{n+akT+T}$ car $n+akT\geq n_0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *T*-périodique à partir du rang n_0 ;
- $a_{n+T+akT}=a_{n+T}$ car $n+T\geq n_1$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *kT*-périodique à partir du rang n_1.

Donc :

$$a_{n+T}=a_{n+T+akT}=a_{n+akT}=a_n.$$

Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *T*-périodique à partir du rang n_1, donc : $n_0\leq n_1$.

Finalement, $n_1=n_0$ et donc, pour tout $p\in\mathscr{P}(a)$:

$$\boxed{\text{Le plus petit entier à partir duquel la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } p\text{-périodique est } n_0.}$$

Pour définir parfaitement une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de UP, il faut connaitre n_0 et ses n_0+T premiers termes : $a_0, a_1, \ldots, a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n_0+T-1}$ (on connait alors T par soustraction : $T=(n_0+T)-n_0$). Donc :

$$\boxed{\text{Il faut } n_0+T+1 \text{ paramètres pour définir parfaitement une suite de } UP.}$$

I.C. Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in UP$.

I.C.1) D'après ce qui précède, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs, donc :

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}}$$

D'après le lemme d'Abel, comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à 1, donc :

$$\boxed{R_a>0}$$

Pour tout $r \in [\![0, T-1]\!]$, la suite $\left(a_{n_0+r+kT} x^{n_0+r+kT}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ (avec les notations des questions précédentes) est extraite de la suite $\left(a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc, pour tout $x \in]-R_a, R_a[$, la série $\left(\sum a_{n_0+r+kT} x^{n_0+r+kT}\right)_k$ converge car la série $\sum a_n x^n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0+r+kT} x^{n_0+r+kT} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0+r} x^{n_0+r+kT} = a_{n_0+r} x^{n_0+r} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^T)^k .$$

Or, $\sum (x^T)^k$ converge si et seulement $x \in]-1,1[$, donc si $a_{n_0+r} \neq 0$, on a $R_a = 1$.

Par contre, si $a_{n_0} = a_{n_0+1} = ... = a_{n_0+T-1}$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang et $\sum a_n x^n$ converge pour tout réel x. Ainsi :

$R_a = +\infty$ si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, et sinon $R_a = 1$.

I.C.2) Avec ce que l'on vient de voir, on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{r=0}^{T-1} a_{n_0+r+kT} x^{n_0+r+kT}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{r=0}^{T-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n_0+r+kT} x^{n_0+r+kT}\right) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{r=0}^{T-1}\left(a_{n_0+r} x^{n_0+r} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^T)^k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \left(\sum_{r=0}^{T-1} a_{n_0+r} x^{n_0+r}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (x^T)^k\right) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \left(\sum_{r=0}^{T-1} a_{n_0+r} x^{n_0+r}\right)\frac{1}{1-x^T}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = P(x) + \frac{Q(x)}{1-x^T}$$

avec $P = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n X^n$ et $Q = \sum_{r=0}^{T-1} a_{n_0+r} X^{n_0+r}$, et donc :

$\sum a_n x^n$ est une fonction rationnelle.

La fonction $x \mapsto P(x) + \dfrac{Q(x)}{1-x^T}$ est polynômiale si et seulement si $x \mapsto \dfrac{Q(x)}{1-x^T}$ l'est, autrement dit si et seulement si $1-X^T$ divise Q. Or, $Q = \sum_{r=0}^{T-1} a_{n_0+r} X^{n_0+r} = X^{n_0} \sum_{r=0}^{T-1} a_{n_0+r} X^r$, donc $1-X^T$ divise Q si et seulement si $1-X^T$ divise $\sum_{r=0}^{T-1} a_{n_0+r} X^r$. Mais ce polynôme est de degré au plus $T-1$, donc la seule possibilité pour que $1-X^T$ le divise est qu'il soit nul, ce qui revient à $Q = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = P(x)$. On a vu dans la question précédente que ceci n'est passible que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. Ainsi :

$\sum a_n x^n$ est une fonction polynômiale si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

I.D. On vient de voir que pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ultimement périodique, on a, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = P(x)+\frac{Q(x)}{1-x^T}=\frac{L(x)}{1-x^T}$$

avec $L=(1-X^T)P+Q\in\mathbb{R}[X]$.

Or, toute fonction rationnelle ne peut s'écrire sous cette forme.

Par exemple, $x\mapsto\dfrac{1}{2-x}$ et, pour tout $x\in\,]-2,2[$:

$$\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}x^n .$$

Ainsi :

> Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R>0$, dont la somme est la restriction à $x\in\,]-R_a,R_a[$ d'une fraction rationnelle, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément ultimement périodique.

Partie II

II.A. Les premiers termes de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … Donc, ceux de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont :

0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, …

On conjecture alors que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$a_{3k}=0 \text{ et } a_{3k+1}=a_{3k+2}=1.$$

Prouvons-le par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$.

On vient de voir que $a_0=0$ et $a_1=a_2=1$, donc la propriété est vraie pour $k=0$.

Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}$. On a alors :

- $a_{3k+1}=a_{3k+2}=1 \Rightarrow F_{3k+1}, F_{3k+2}$ impairs $\Rightarrow F_{3(k+1)}=F_{3k+3}=F_{3k+1}+F_{3k+2}$ pair $\Rightarrow a_{3(k+1)}=0$;
- $\begin{cases}a_{3k+2}=1\\ a_{3k+3}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{3k+2} \text{ impair}\\ F_{3k+3} \text{ pair}\end{cases} \Rightarrow F_{3(k+1)+1}=F_{3k+4}=F_{3k+2}+F_{3k+3}$ impair $\Rightarrow a_{3(k+1)+1}=1$;
- $\begin{cases}a_{3k+3}=0\\ a_{3k+4}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{3k+3} \text{ pair}\\ F_{3k+4} \text{ impair}\end{cases} \Rightarrow F_{3(k+1)+2}=F_{3k+5}=F_{3k+3}+F_{3k+4}$ impair $\Rightarrow a_{3(k+1)+2}=1$.

Ainsi, $a_{3(k+1)}=0$ et $a_{3(k+1)+1}=a_{3(k+1)+2}=1$, donc la propriété est vraie pour $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour $k\in\mathbb{N}$. Ceci prouve que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3-périodique, donc :

> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique.

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1 et, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\sum_{k=0}^{+\infty}x^{3k+1}+\sum_{k=0}^{+\infty}x^{3k+2}=(x+x^2)\sum_{k=0}^{+\infty}(x^3)^k=(x+x^2)\frac{1}{1-x^3}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est 1 et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x+x^2}{1-x^3}.}$$

II.B. On a $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = -a_{2n+1} = a_n$.

Prouvons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \pm 1$.

- On a $a_0 = 1$.
- Si , pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $a_k = \pm 1$ pour tout entier k compris entre 0 et n, alors :
  - si $n = 2p$, $a_{n+1} = a_{2p+1} = -a_p = \pm 1$ (car $p \leq 2p = n$) ;
  - si $n = 2p+1$, $a_{n+1} = a_{2p+2} = a_{p+1} = \pm 1$ (car $p+1 \leq 2p+1 = n$).

  Ainsi, $a_{n+1} = \pm 1$ dans tous les cas, et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.B.1) D'après ce que l'on vient de prouver, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = 1$, donc $\sum |a_n x^n|$ converge si et seulement si $|x| < 1$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est 1.}}$$

II.B.2) Soit $x \in]-1,1[$.

Comme $|a_{2n}| = |a_{2n+1}| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ convergent et :

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ pair}}} a_n x^n + \sum_{\substack{n\geq 0 \\ n \text{ impair}}} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n\geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1} = \sum_{n\geq 0} a_n (x^2)^n - x \sum_{n\geq 0} a_n (x^2)^n = (1-x) \sum_{n\geq 0} a_n (x^2)^n \end{aligned}$$

Soit, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\boxed{S(x) = (1-x)\, S(x^2)}$$

Soit $x \in]-1,1[$. Remarquons déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^{2^n} \in]-1,1[$, donc :

$$S(x^{2^n}) = (1-x^{2^n})\, S\left((x^{2^n})^2\right) = (1-x^{2^n})\, S(x^{2^{n+1}}).$$

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(x) = \prod_{k=0}^{n} (1-x^{2^k})\, S(x^{2^{n+1}})$.

- On a :

$$\prod_{k=0}^{0} (1-x^{2^k})\, S(x^{2^{n+1}}) = (1-x^{2^0})\, S(x^2) = (1-x)\, S(x^2) = S(x).$$

  Donc, la propriété est vraie au rang 0.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$, soit $S(x)=\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})\,S(x^{2^{n+1}})$.

  Comme $S(x^{2^{n+1}})=(1-x^{2^{n+1}})\,S(x^{2^{n+2}})$, on a :

$$S(x)=\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})(1-x^{2^{n+1}})\,S(x^{2^{n+2}})=\prod_{k=0}^{n+1}(1-x^{2^k})\,S(x^{2^{n+2}}).$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit :

$$S(x)=\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})\,S(x^{2^{n+1}}).$$

Enfin, S est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1, donc S est continue sur $]-1,1[$ et, en particulier en 0. Comme $x\in\,]-1,1[$, $x^{2^{n+1}}\to 0$ quand $n\to+\infty$, donc $S(x^{2^{n+1}})\to S(0)=a_0=1$, alors :

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}\left[\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})\,S(x^{2^{n+1}})\right]=\left(\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})\right)\left(\lim_{n\to+\infty}S(x^{2^{n+1}})\right).$$

Soit, pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\boxed{S(x)=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})}$$

II.B.3) Pour tout $x\in\,]0,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$0\le\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})\le 1-x.$$

En passant à la imite quand n tend vers l'infini, on obtient pour tout $x\in\,]0,1[$:

$$0\le S(x)\le 1-x.$$

Et comme $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$, le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{S(x)}{(1-x)^0}=0.$$

Par ailleurs, pour tout $x\in\,]0,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n}=\frac{\prod_{k=0}^{n}(1-x^{2^k})\,S(x^{2^{n+1}})}{(1-x)^n}=\frac{1}{(1-x)^n}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left[(1-x)\sum_{j=0}^{2^k-1}x^j\right]\right)(1-x^{2^n})S(x^{2^{n+1}})=\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{2^k-1}x^j\right]\right)(1-x^{2^n})S(x^{2^{n+1}}).$$

Donc :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{S(x)}{(1-x)^n}=\lim_{x\to 1^-}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left[\sum_{j=0}^{2^k-1}x^j\right]\right)(1-x^{2^n})S(x^{2^{n+1}})=\left(\prod_{k=0}^{n-1}2^k\right)\times 0\times 0=0.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{S(x)}{(1-x)^n}=0}$$

On a vu que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique et non nulle à partir d'un certain rang, alors il existe $T\in\mathbb{N}^*$ et $L\in\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $x\in\,]-1,1[$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\frac{L(x)}{1-x^T}=\frac{L(x)}{(1-x)(1+x+...+x^{T-1})}$.

Si on note $\alpha\in\mathbb{N}$ la multiplicité de 1 dans L et $L=(X-1)^\alpha R$ avec $R\in\mathbb{R}[X]$ et $\lim_{x\to1^-}R(x)=R(1)\neq0$, on a :

$$\lim_{x\to1^-}\left|\frac{S(x)}{(1-x)^\alpha}\right|=\lim_{x\to1^-}\left|\frac{R(x)}{(1-x)(1+x+...+x^{T-1})}\right|=\frac{|R(1)|}{T}\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}=+\infty.$$

Or, on vient de voir que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{x\to1^-}\left|\frac{S(x)}{(1-x)^n}\right|=0$, donc l'hypothèse « $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique » mène à une absurdité et ainsi :

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ n'est pas ultimement périodique.}}$$

II.C. On a $x=\frac{a}{b}$ avec $a,b\in\mathbb{N}^*$ et $PGCD(a,b)=1$, $a=d_0b+r_0$ la division euclidienne de a par b (avec $r_0\in[\![0,b-1]\!]$) et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $10r_n=d_{n+1}b+r_{n+1}$ la division euclidienne de $10r_n$ par b (avec $r_{n+1}\in[\![0,b-1]\!]$).

Remarquons que $x=\frac{a}{b}=d_0+\frac{r_0}{b}$ avec $d_0\in\mathbb{N}$ et $0\leq\frac{r_0}{b}<1$, donc on a bien $d_0=E(x)$.

II.C.1) Ici, $x=\frac{22}{7}=3,1428571428...$, et :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	3	1	4	2	8	5	7	1	4	2	8
r_n	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4

II.C.2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $r_n\in[\![0,b-1]\!]$, donc parmi les $b+1$ termes $r_0,r_1,...,r_{b-1},r_b$, au moins deux sont égaux. Ainsi, il existe $(n_0,T)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r_{n_0+T}=r_{n_0}$.

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout entier $n\geq n_0$, $r_{n+T}=r_n$.

- D'après ce qui précède, la propriété est vraie au rang n_0.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n\geq n_0$. On a alors les divisions euclidiennes :

$$10r_{n+T}=d_{n+T+1}b+r_{n+T+1}$$
$$10r_n=d_{n+1}b+r_{n+1}$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $r_{n+T}=r_n$, donc :

$$10r_n=d_{n+1}b+r_{n+1}=d_{n+T+1}b+r_{n+T+1}.$$

  Et, par unicité de la division euclidienne :

$$d_{n+T+1}=d_{n+1}$$
$$r_{n+T+1}=r_{n+1}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout entier $n\geq n_0$.

Ainsi, il existe $(n_0,T)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est T-périodique à partir du rang n_0, donc :

$$\boxed{(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est ultimement périodique.}}$$

On a alors, pour tout entier $n\geq n_0+1$:

$$d_{n+T}=\frac{1}{b}\left(10r_{n+T-1}-r_{n+T}\right)=\frac{1}{b}\left(10r_{n-1}-r_n\right)=d_n\,.$$

Donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est T-périodique à partir du rang n_0+1 et ainsi :

$$\boxed{(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est ultimement périodique.}}$$

II.C.3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $d_n=\dfrac{1}{b}\left(10r_{n-1}-r_n\right)$ avec $r_{n-1},r_n\in[\![0,b-1]\!]$, donc :

$$\begin{cases}0\leq r_{n-1}<b\\ 0\leq r_n<b\end{cases}\quad\Rightarrow\quad -b<10r_{n-1}-r_n<10b\quad\Rightarrow\quad -1<d_n<10\,.$$

Et, comme d_n est entier, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{0\leq d_n\leq 9}$$

II.C.4) Remarquons déjà que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq\dfrac{d_n}{10^n}\leq\dfrac{9}{10^n}$ et $\sum\dfrac{9}{10^n}$ converge, donc $\sum\dfrac{d_n}{10^n}$ converge.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$d_n=\frac{1}{b}\left(10r_{n-1}-r_n\right)\quad\Leftrightarrow\quad 10^{-n}d_n=\frac{1}{b}\left(\frac{r_{n-1}}{10^{n-1}}-\frac{r_n}{10^n}\right).$$

Alors :

$$\sum_{k=1}^{n}10^{-k}d_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b}\left(\frac{r_{k-1}}{10^{k-1}}-\frac{r_k}{10^k}\right)=\frac{1}{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r_{k-1}}{10^{k-1}}-\frac{r_k}{10^k}\right)=\frac{1}{b}\left(\frac{r_0}{10^0}-\frac{r_n}{10^n}\right)=\frac{1}{b}\left(r_0-\frac{r_n}{10^n}\right).$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r_n\in[\![0,b-1]\!]$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{r_n}{10^n}=0$ et ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}10^{-k}d_k=\frac{r_0}{b}=x-d_0=x-E(x)\,.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{x=E(x)+\sum_{k=1}^{+\infty}10^{-k}d_k}$$