Corrigé du DS de n° 3

Exercice 1 (extrait : E3A - PSI - 2011)

(1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n et v_n sont des fonctions rationnelles définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (les dénominateurs ne s'annulent jamais). Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{(2\pi)^2 n^2}$ converge :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ convergent simplement sur } \mathbb{R}.}$$

(2) On prend un réel $a>0$.

(a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$u_n'(t) = -\frac{2(t+2\pi n)}{\left[1+(t+2\pi n)^2\right]^2}.$$

Pour tout $t\in[-a,a]$, on a $t+2\pi n \geq -a+2\pi n \geq 0$, soit $u_n'(t)\leq 0$, quand $n\geq N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right)+1$.

Dans ce cas, la fonction u_n est décroissante sur $[-a,a]$, et comme elle est positive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, t\in[-a,a],\ |u_n(t)| = u_n(t) \leq u_n(-a).$$

Ainsi, avec $N = E\left(\frac{a}{2\pi}\right)+1$:

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\geq N,\ \sup_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a).}$$

(b) On a $u_n(-a) = \frac{1}{1+(-a+2\pi n)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{4\pi^2 n^2}$ converge, donc $\sum u_n(-a)$ converge et comme $\lim_{t\in[-a,a]} |u_n(t)| = u_n(-a)$ à partir d'un certain rang :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge uniformément sur } [-a,a].}$$

On a pour tout $t\in[-a,a]$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|u_n'(t)| = \frac{2|t+2\pi n|}{\left[1+(t+2\pi n)^2\right]^2} \leq \frac{2|t+2\pi n|}{(t+2\pi n)^4} = \frac{2}{|t+2\pi n|^3}.$$

Alors, pour tout $t \in [-a, a]$ et tout $n \geq N$:

$$|u_n'(t)| \leq \frac{2}{(-a+2\pi n)^3}.$$

Comme $\frac{2}{(-a+2\pi n)^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^3 n^3}$ et $\sum \frac{1}{4\pi^3 n^3}$ converge, la série $\sum \frac{2}{(-a+2\pi n)^3}$ converge et $\sum u_n'$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[-a, a]$, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n' \text{ converge uniformément sur } [-a,a].}$$

(3) On pose $F = u_0 + \sum_{n\geq 1} u_n + \sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 1} v_n$.

(a) On vient de voir que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n et v_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$;
- $\sum u_n'$ et $\sum v_n'$ convergent uniformément sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$.

Ces hypothèses permettent de conclure que les fonctions $U = \sum_{n\geq 1} u_n$ et $V = \sum_{n\geq 1} v_n$ sont de classe C^1 sur $[-a, a]$, pour tout réel $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}$.

Comme $F = u_0 + U + V$ est une somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions u_n et v_n, ainsi que la fonction *F*, sont définies sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u_0(-t) = \frac{1}{1+(-t)^2} = \frac{1}{1+t^2} = u_0(t)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(-t) = \frac{1}{1+(-t+2\pi n)^2} = \frac{1}{1+(t-2\pi n)^2} = v_n(t).$$

On alors $v_n(-t) = u_n(t)$ et :

$$F(-t) = u_0(-t) + \sum_{n\geq 1} u_n(-t) + \sum_{n\geq 1} v_n(-t) = u_0(t) + \sum_{n\geq 1} v_n(t) + \sum_{n\geq 1} u_n(t) = F(t).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est paire.}}$$

(c) Comme vu plus haut, les fonctions u_n, v_n (pour tout $n\in\mathbb{N}$) et F sont définies sur $\mathbb{R}$ et :

$$t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow t+2\pi\in\mathbb{R}.$$

De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n(t+2\pi)=\frac{1}{1+(t+2\pi+2\pi n)^2}=\frac{1}{1+\left(t+2\pi(n+1)\right)^2}=u_{n+1}(t)$$

Et pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$v_n(t+2\pi)=\frac{1}{1+(t+2\pi-2\pi n)^2}=\frac{1}{1+\left(t-2\pi(n-1)\right)^2}=v_{n-1}(t).$$

Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}F(t+2\pi)&=\sum_{n\geq 0}u_n(t+2\pi)+\sum_{n\geq 1}v_n(t+2\pi)\\&=\sum_{n\geq 0}u_{n+1}(t)+\sum_{n\geq 1}v_{n-1}(t)\\&=\sum_{n\geq 1}u_n(t)+\sum_{n\geq 0}v_n(t)\\&=v_0(t)+\sum_{n\geq 1}u_n(t)+\sum_{n\geq 1}v_n(t)\end{aligned}$$

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $u_0(t)=\dfrac{1}{1+t^2}=v_0(t)$, donc $F(t+2\pi)=u_0(t)+\sum_{n\geq 1}u_n(t)+\sum_{n\geq 1}v_n(t)=F(t)$ et finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2015)

On a :

- $f\in C^2\left([0,1],[0,1]\right)$,
- $f'\geq 0$, $f''\geq 0$,
- $f(1)=1$, $f'(0)<1$, $f''(1)>0$, $f'(1)=m$,
- $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

I.A.1) Comme *f* est à images dans $[0,1]$, on a $u_1=f(u_0)=f(0)\geq 0=u_0$.

Comme $f'\geq 0$, f est croissante sur $[0,1]$, donc si $u_{n+1}\geq u_n$, alors $u_{n+2}=f(u_{n+1})\geq f(u_n)=u_{n+1}$.

Ainsi, $u_0\leq u_1$ et $u_n\leq u_{n+1}$ implique $u_{n+1}\leq u_{n+2}$: ceci prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq u_{n+1}$ et donc que :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

De plus, $u_0 = 0 \in [0,1]$ et comme f est à images dans $[0,1]$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$. Ainsi, tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$, donc la suite est bornée et comme elle est croissante :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in [0,1]$.

I.A.2) Posons $g(x) = f(x) - x$ et $F = \{x \in [0,1], f(x) = x\} = \{x \in [0,1], g(x) = 0\}$.

On a $g(1) = f(1) - 1 = 0$, donc $1 \in F$.

L'ensemble F est alors une partie non vide de $\mathbb{R}$, incluse dans $[0,1]$, donc minorée par 0 : il admet une borne inférieure $\alpha \in [0,1]$.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F qui converge vers α, et par continuité de g, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\alpha)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, donc $g(x_n) = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0 = g(\alpha)$, donc $\alpha \in F$. Ainsi, α est le plus petit élément de F, qui est l'ensemble des solutions $f(x) = x$, donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet une plus petite solution.}}$$

On note $x_f = \min F$.

I.A.3) Comme f est continue sur $[0,1]$, donc en ℓ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in F$ et $\underline{x_f \leq \ell}$.

On a $u_0 = 0 \in [0, x_f]$.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $u_n \in [0, x_f]$. On a alors par croissance de f :

$$0 \leq u_n \leq x_f \quad \Rightarrow \quad f(0) \leq f(u_n) \leq f(x_f) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(0) \leq u_{n+1} \leq x_f \quad \text{(car } f(x_f) = x_f\text{).}$$

Ainsi, $u_{n+1} \in [0, x_f]$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, x_f]$ et en passant à la limite, on obtient $\ell \in [0, x_f]$, soit $\underline{\ell \leq x_f}$.

Ainsi, $x_f \leq \ell$ et $x_f \geq \ell$, donc :

$$\boxed{\ell = x_f}$$

I.B) Comme $F \subset [0,1]$ et $x_f = \min F$, montrer que $x_f \in [0,1[$ revient à montrer que f admet un point fixe strictement inférieur à 1.

f est de classe C^2 sur $[0,1]$, donc g aussi en tant que différence de telles fonctions, et $g''=f''\geq 0$ donc g' est croissante sur $[0,1]$ de $g'(0)=f'(0)-1<0$ à $g'(1)=f'(1)-1=m-1>0$.

Ainsi, g' (qui est continue) s'annule au moins une fois en $\beta\in\,]0,1[$ et :

- sur $[0,\beta]$, $g'\leq 0$ donc g est décroissante de $g(0)=f(0)\geq 0$ à $g(\beta)$;
- sur $[\beta,1]$, $g'\geq 0$ donc g est croissante de $g(\beta)$ à $g(1)=f(1)-1=0$.

Ce dernier point prouve que $g(\beta)\leq 0$ et, comme $g(0)\geq 0$ et g est continue sur $[0,\beta]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\gamma\in[0,\beta]\subset[0,1[$ tel que $g(\gamma)=0$, soit $f(\gamma)=\gamma$.

Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{x_f\in[0,1[}$$

I.C) Ici $m\leq 1$, donc $g'(1)=f'(1)-1=m-1\leq 0$ et on a toujours g' croissante sur $[0,1]$.

De plus, $g''(1)=f''(1)>0$ et g'' est continue sur $[0,1]$, donc il existe $\varepsilon\in\,]0,1[$ tel que $g''>0$ sur $[\varepsilon,1]$, donc g' est strictement croissante sur $[\varepsilon,1]$.

Ainsi, pour tout $x\in[\varepsilon,1[$, $g'(x)<g'(1)\leq 0$ et pour tout $x\in[0,\varepsilon]$, $g'(x)\leq g'(\varepsilon)<0$. Ainsi, $g'<0$ sur $[0,1[$, donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Alors, pour tout $x\in[0,1[$, $g(x)<g(1)=0$ donc $g(x)\neq 0$ et ainsi, $F=\{1\}$, d'où :

$$\boxed{x_f=1}$$

On vient de voir que pour tout $x\in[0,1[$, $g(x)<0$, soit $f(x)<x$.

Prouvons alors par récurrence sur pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 1$.

- On a $u_0=0\neq 1$.
- Si, pour $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n\neq 1$, alors $u_n<1$ donc $u_{n+1}=f(u_n)<f(1)=1$ et ainsi, $u_{n+1}\neq 1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n\neq 1}$$

I.D.1) Ici $m=1$.

Comme *f* est C^2 sur $[0,1]$, la formule de Taylor-Young en 1 permet d'écrire :

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)=1+m(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right).$$

Comme $m=1$, on a $\ell=x_f=1$ donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et, on peut écrire :

$$u_{n+1}=f(u_n)=1+m(u_n-1)+\frac{f''(1)}{2}(u_n-1)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n-1)^2\right).$$

Soit, avec $\varepsilon_n = 1 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2).$$

Donc, avec $m = 1$ et $\varepsilon_n \neq 0$ (d'après la question précédente) :

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}} = \frac{\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2)}{\varepsilon_n\left(\varepsilon_n + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n)\right)} = \frac{\frac{f''(1)}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}{1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}}$$

I.D.2) Grace au lemme de Césaro, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = \frac{f''(1)}{2}.$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_n} - 1$ par télescopage (avec $\varepsilon_0 = 1 - u_0 = 1$), donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\varepsilon_n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{f''(1)}{2}.$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\varepsilon_n} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\varepsilon_n}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\varepsilon_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(1-u_n)} = \frac{f''(1)}{2}.$$

On a $f''(1) > 0$, donc $f''(1) \neq 0$ et on peut écrire, $n(1-u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{f''(1)}$, soit :

$$\boxed{1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{f''(1)\,n}}$$

I.E.1) Ici $m < 1$, on a toujours $\ell = x_f = 1$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2)$.

Donc :

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n) \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m.$$

Comme $\varepsilon_n > 0$ et $m < 1$, la règle de d'Alembert permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum \varepsilon_n \text{ converge.}}$$

Comme f' est croissante est positive sur $[0,1]$, si $f'(1)=m=0$, alors f' est nulle et f'' aussi, ce qui est absurde car $f''(1)>0$, donc $m>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a alors $\dfrac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}>0$.

On peut alors poser $v_n=\ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, :

$$v_n=\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right)=\ln\left(\frac{1}{m\varepsilon_n}\left(m\varepsilon_n-\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2+\underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2)\right)\right)=\ln\left(1-\frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n+\underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n)\right).$$

Donc, comme $\dfrac{f''(1)}{2m}>0$, on a $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n$ et, comme $\sum\varepsilon_n$ converge, $\sum v_n$ converge, soit :

$$\boxed{\text{La série } \sum\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right) \text{ converge.}}$$

I.E.2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\ln\left(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}\right)-\ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)$, donc la convergence de la série $\sum v_n$ implique la convergence de la suite $\left(\ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons a la limite de cette suite.

Par continuité de la fonction exponentielle en a, on alors :

$$\lim_{n\to+\infty} m^{-n}\varepsilon_n=e^a.$$

Ainsi, en posant $c=e^a>0$, on a :

$$\boxed{\varepsilon_n=1-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}c\,m^n}$$

Exercice 3 (extrait : Mines - PSI - 2019)

1) Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{\dfrac{\left(p(n+1)\right)^r}{\left(p(n+1)\right)!}z^{n+1}}{\dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^n}\right|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^r\frac{1}{(pn+p)(pn+p-1)...(pn+1)}|z|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum\dfrac{(pn)^r}{(pn)!}z^n$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum\frac{(pn)^r}{(pn)!}z^n \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

Comme $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} (z^p)^n$ converge aussi pour tout $z \in \mathbb{C}$, et donc :

$$\boxed{\text{La série entière } \sum \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn} \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

On fixe un réel $x > 0$.

2) La fonction $\varphi : t \mapsto t^{1-r}(t-1)^r$ est définie, continue sur $[1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que produit de telles fonctions et pour tout $t \in \,]1,+\infty[$:

$$\varphi'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + rt^{1-r}(t-1)^{r-1} = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r}\left[(1-r)(t-1)+rt\right] = \frac{(t-1)^{r-1}}{t^r}(t-1+r).$$

Sur $]1,+\infty[$, $\varphi'(t) > 0$, donc sur $[1,+\infty[$, φ est continue et strictement croissante de $\varphi(1) = 0$ à $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ (car $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$). Donc, d'après le théorème de la bijection continue, φ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$ et $x > 0$ admet un unique antécédent $t_x = \varphi^{-1}(x)$ dans $[1,+\infty[$.

Comme $\varphi_x = \varphi - x$, φ_x s'annule en un unique élément de $[1,+\infty[$.

De plus, comme φ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on a pour tout $t \in [1,+\infty[$:

$$\varphi_x(t) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t) - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t) > x \quad \Leftrightarrow \quad t > \varphi^{-1}(x) = t_x.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } t_x \in [1,+\infty[\text{ tel que } \varphi_x(t_x) = 0 \text{ et } \varphi_x < 0 \text{ sur } [1,t_x[\text{ et } \varphi_x > 0 \text{ sur }]t_x,+\infty[.}$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{(n+1)^r}{(n+1)!}x^{n+1} - \frac{n^r}{n!}x^n = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^{n+1} - \frac{n^r}{n!}x^n = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n\left(x - n^r(n+1)^{1-r}\right).$$

Donc, $u_{n+1}(x) - u_n(x) = -\frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n\varphi_x(n+1)$ et comme $\frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n > 0$, $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est du signe opposé à celui de $\varphi_x(n+1)$. Ainsi :

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_x(n+1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \in [1,t_x] \quad \Leftrightarrow \quad n+1 \leq \lfloor t_x \rfloor = N_x.$$

Et ainsi, $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante jusqu'au rang N_x, donc :

$$\boxed{(u_n(x))_{0\leq n\leq N_x} \text{ est croissante et } (u_n(x))_{n\geq N_x} \text{ est décroissante.}}$$

On note $M_x = u_{N_x}(x)$, le maximum de $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x+\alpha \in [1,+\infty[$, soit $x \geq 1-\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_x(x+\alpha) &= (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x^{1-r}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r} x^r \left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - x \\
&= x\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - x = x\left[1+(1-r)\frac{\alpha}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[1+r\frac{\alpha-1}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x \\
&= x\left[1+r\frac{\alpha-1}{x}+(1-r)\frac{\alpha}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right]-x = \alpha-r+\underset{x\to+\infty}{o}(1)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\varphi_x(x+\alpha)=\alpha-r}$$

On a vu que φ réalise une bijection strictement croissante de $[1,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$, donc φ^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[1,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{-1}(x)=+\infty$. De plus :

$$\varphi(t)=t^{1-r}(t-1)^r = t^{1-r}t^r\left(1-\frac{1}{t}\right)^r = t\left(1-\frac{1}{t}\right)^r = t\left(1-r\frac{1}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t}\right)\right)=t-r+\underset{t\to+\infty}{o}(1).$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\big(t-\varphi(t)\big)=r$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{-1}(x)=+\infty$, on a en posant $t=\varphi^{-1}(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\varphi^{-1}(x)-x\big)=r.$$

Enfin, comme $t_x=\varphi^{-1}(x)$, on obtient :

$$\boxed{t_x-x-r\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$$

4) Soit $k\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lfloor x\rfloor+k\geq 0$ et $\lfloor x\rfloor>0$. On a toujours $u_{\lfloor x\rfloor}(x)\neq 0$ et :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=\frac{\dfrac{(\lfloor x\rfloor+k)^r}{(\lfloor x\rfloor+k)!}x^{\lfloor x\rfloor+k}}{\dfrac{\lfloor x\rfloor^r}{\lfloor x\rfloor!}x^{\lfloor x\rfloor}}=\frac{\lfloor x\rfloor!}{(\lfloor x\rfloor+k)!}\left(\frac{\lfloor x\rfloor+k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r x^k.$$

Si $k=0$, on a $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)=u_{\lfloor x\rfloor}(x)$, sinon :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^k}{(\lfloor x\rfloor+1)\dots(\lfloor x\rfloor+k)}\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r & \text{si } k>0\\[2ex] \dfrac{\lfloor x\rfloor\dots(\lfloor x\rfloor-|k|+1)}{x^{|k|}}\left(1+\dfrac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r & \text{si } k<0\end{cases}$$

Or, $\left(1+\frac{k}{\lfloor x\rfloor}\right)^r \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ et $\lfloor x\rfloor\ldots\left(\lfloor x\rfloor-|k|+1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\lfloor x\rfloor+1\right)\ldots\left(\lfloor x\rfloor+k\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lfloor x\rfloor^k$, donc, dans tous les cas (avec $\lfloor x\rfloor>0$) :

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^k}{\lfloor x\rfloor^k}=\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)^k.$$

De plus, on a $0<\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$ donc $1\le\frac{x}{\lfloor x\rfloor}<1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\lfloor x\rfloor}=1$, qui implique que :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor}\right)^k=1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)}=1$, soit :

$$\boxed{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x\rfloor}(x)}$$

5) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $x\ge m$, donc $\lfloor x\rfloor\ge m$.

On a vu que $t_x-x\xrightarrow[x\to+\infty]{} r>0$, donc il existe $A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x\ge A$, $t_x-x\ge 0$, soit $x\le t_x$ qui, avec $\lfloor x\rfloor\ge m$, implique que $0\le\lfloor x\rfloor-m\le\lfloor x\rfloor\le N_x$. D'après la question 2, on a alors :

$$u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\le u_{\lfloor x\rfloor-m+1}(x)\le\ldots\le u_{\lfloor x\rfloor}(x) \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}u_i(x)\ge\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)=(m+1)\,u_{\lfloor x\rfloor-m}(x).$$

Or, d'après la question précédente, $u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x\rfloor}(x)$, donc il existe $B_m\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout réel $x\ge B_m$, on a :

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\le u_{\lfloor x\rfloor}(x)\le\left(1+\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x) \quad\Rightarrow\quad (m+1)\,u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)=m\left(1+\frac{1}{m}\right)u_{\lfloor x\rfloor-m}(x)\ge m\,u_{\lfloor x\rfloor}(x).$$

Alors, pour tout réel $x\ge\max\left(m,A,B_m\right)$, on a :

$$\boxed{\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}u_i(x)\ge m\,u_{\lfloor x\rfloor}(x)}$$

Comme pour tout $i\in[\![\lfloor x\rfloor-m,\lfloor x\rfloor]\!]$, $i^r\le\lfloor x\rfloor^r\le x^r$ et pour tout $i\in\mathbb{N}$, $\frac{x^i}{i!}\ge 0$, on peut écrire :

$$\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}u_i(x)=\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}\frac{i^r}{i!}x^i\le\lfloor x\rfloor^r\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}\frac{x^i}{i!}\le x^r\sum_{i=\lfloor x\rfloor-m}^{\lfloor x\rfloor}\frac{x^i}{i!}\le x^r\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}=x^re^x.$$

Ainsi, pour tout réel $x \geq \max(m, A, B_m)$, on a $m u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \leq x^r e^x$, donc :

$$\boxed{u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}}$$

6) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Si on pose $m = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $C = \max(m, A, B_m)$ tel que défini dans la question précédente, on a $\frac{1}{m} < \varepsilon$ et pour tout réel $x \geq C$, $u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m} < \varepsilon x^r e^x$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \geq C$, $u_{\lfloor x \rfloor}(x) < \varepsilon x^r e^x$. Ceci permet de conclure que :

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right).$$

Enfin, comme d'après la question 4, on a $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\boxed{u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^r e^x\right) \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.}$$

Rappelons que $M_x = u_{N_x}(x)$ avec $N_x = \lfloor t_x \rfloor$ et que $t_x - x - r \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel $x \geq D$, $-1 \leq t_x - x - r \leq 1$, et :

$$\lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor t_x - x \rfloor \leq \lfloor r \rfloor + 1.$$

De plus, pour tous réels *a* et *b*, on a :

$$\begin{cases} a+b-1 < \lfloor a+b \rfloor \leq a+b \\ a-1 \leq \lfloor a \rfloor \leq a \\ b-1 \leq \lfloor b \rfloor \leq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1 < \lfloor a+b \rfloor \leq a+b \\ -a \leq -\lfloor a \rfloor < -a+1 \\ -b \leq -\lfloor b \rfloor < -b+1 \end{cases} \Rightarrow -1 < \lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor < 2.$$

Et comme $\lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor$ est entier, on obtient $0 \leq \lfloor a+b \rfloor - \lfloor a \rfloor - \lfloor b \rfloor \leq 1$, soit :

$$\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = 0 \text{ ou } 1.$$

Ainsi, $N_x = \lfloor t_x \rfloor = \lfloor t_x - x + x \rfloor = \lfloor t_x - x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \varepsilon$ avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$ et :

$$\lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor t_x - x \rfloor \leq \lfloor r \rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor r \rfloor - 1 + \lfloor x \rfloor + \varepsilon \leq N_x \leq \lfloor r \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor + \varepsilon.$$

D'où, avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$:

$$\lfloor r \rfloor - 1 \leq \lfloor r \rfloor - 1 + \varepsilon \leq N_x - \lfloor x \rfloor \leq \lfloor r \rfloor + 1 + \varepsilon \leq \lfloor r \rfloor + 2.$$

Ainsi, $N_x = \lfloor x \rfloor + i$ où *i* est un entier compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

On a alors :

$$\left.\begin{array}{r} u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor-1}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \\ u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \\ u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor+1}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \\ u_{\lfloor x\rfloor+\lfloor r\rfloor+2}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad M_x=u_{N_x}(x)=u_{\lfloor x\rfloor+i}(x)=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right).$$

Donc :

$$\boxed{M_x=\underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)}$$

7) Comme $z\neq 1$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$|D_n|=\left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right|=\left|\frac{1-z^n}{1-z}\right|=\frac{\left|1-z^n\right|}{|1-z|}\leq\frac{|1|+\left|z^n\right|}{|1-z|}=\frac{1+|z|^n}{|1-z|}.$$

Et comme $|z|=1$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{|D_n|\leq\frac{2}{|1-z|}}$$

D'après la question 1 (en prenant $p=1$), la série $\sum u_n(x)=\sum \frac{n^r}{n!}x^n$ est absolument convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$. Comme la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum D_n u_{n-1}(x) \text{ et } \sum D_n u_n(x) \text{ sont absolument convergentes.}}$$

8) Comme les séries $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes, donc convergentes, on peut écrire pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_{n-1}(x)-\sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} D_{n+1}u_n(x)-\sum_{n=1}^{+\infty} D_n u_n(x) \\ &= D_1 u_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(D_{n+1}-D_n\right)u_n(x)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{+\infty} z^n u_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n u_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\frac{n^r}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}(zx)^n \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)=S_{r,1}(zx)}$$

La série $\sum D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)$ est absolument convergente, car $\sum D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum D_n u_n(x)$ le sont et on a :

$$\left|S_{r,1}(zx)\right|=\left|\sum_{n=1}^{+\infty} D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\left|D_n\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\left|D_n\right|\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|.$$

De même, la série $\sum\left(u_{n-1}(x)-u_n(x)\right)$ est absolument convergente, car $\sum u_n(x)$, et donc $\sum u_{n-1}(x)$, le sont, donc, avec la question précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left|S_{r,1}(zx)\right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{|1-z|}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|=\frac{2}{|1-z|}\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right| \\ &\leq \frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{N_x}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|\right)\end{aligned}.$$

On a vu que la suite $\left(u_n(x)\right)_{n\geq N_x}$ est croissante jusqu'au rang N_x, puis décroissante, donc :

- pour $n\leq N_x$, $u_{n-1}(x)-u_n(x)\leq 0$ et $\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|=u_n(x)-u_{n-1}(x)$;
- pour $n>N_x$, $u_{n-1}(x)-u_n(x)\geq 0$ et $\left|u_{n-1}(x)-u_n(x)\right|=u_{n-1}(x)-u_n(x)$.

Alors :

$$\left|S_{r,1}(zx)\right|\leq\frac{2}{|1-z|}\left(\sum_{n=1}^{N_x}\left[u_n(x)-u_{n-1}(x)\right]+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\left[u_{n-1}(x)-u_n(x)\right]\right).$$

Or :

$$\sum_{n=1}^{N_x}\left[u_n(x)-u_{n-1}(x)\right]+\sum_{n=N_x+1}^{+\infty}\left[u_{n-1}(x)-u_n(x)\right]=u_{N_x}(x)-u_0(x)+u_{N_x}(x)=2M_x-u_0(x)\leq 2M_x.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\left|S_{r,1}(zx)\right|\leq\frac{4M_x}{|1-z|}}$$

On a établi dans la question 6 que $M_x\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^r e^x\right)$.

L'inégalité ci-dessus donne alors immédiatement :

$$\boxed{S_{r,1}(zx)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(x^r e^x\right)}$$

9) Pour tout réel *x*, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-1}S_{r,1}(\omega^k x)=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^r}{n!}(\omega^k x)^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p-1}\frac{n^r}{n!}(\omega^k x)^n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^r}{n!}x^n\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k\right).$$

Comme $\omega=\exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$, $\omega^n=1$ si et seulement si *p* divise *n* et dans ce cas, $\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^n)^k=\sum_{k=0}^{p-1}1=p$.

Dans tous les autres cas, on a $\omega^n \neq 1$ et :

$$\sum_{k=0}^{p-1} (\omega^n)^k = \frac{1-(\omega^n)^p}{1-\omega^n} = \frac{1-(e^{2i\pi})^n}{1-\omega^n} = 0 .$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \sum_{\substack{n=1 \\ p|n}}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n p = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^{pn} = p\, S_{r,p}(x) .$$

On a donc bien pour tout réel x :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = p\, S_{r,p}(x)}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) .$$

Et, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\left|\omega^k\right| = 1$ et $\omega^k \neq 1$, donc $S_{r,1}(\omega^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right)$ d'après la question précédente. Alors :

$$\sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right) .$$

De plus, on a admis la propriété désirée pour $p = 1$, soit $S_{r,1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$ ou bien :

$$S_{r,1}(x) = x^r e^x + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right) .$$

Ainsi :

$$p\, S_{r,p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = S_{r,1}(x) + \sum_{k=1}^{p-1} S_{r,1}(\omega^k x) = x^r e^x + \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^r e^x\right) .$$

Soit $p\, S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^r e^x$ et donc, on a bien le résultat désiré pour $p \geq 2$:

$$\boxed{S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x}$$

Exercice 4 (extrait : CCP - PSI - 2018)

On a $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Q1. On a $\Delta(X^0) = \Delta(1) = X.0 = 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\Delta(X^k) = X.(kX^{k-1}) = kX^k .$$

Remarquons que $\Delta(X^k) = kX^k$ reste vrai pour $k = 0$ et ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\boxed{\Delta(X^k) = kX^k}$$

Q2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\Delta \circ (\Delta - Id)(P) = \Delta\big(\Delta(P) - P\big) = \Delta\big(X P' - P\big) = X\big(X P' - P\big)' = X\big(P' + X P'' - P'\big).$$

Soit :

$$\boxed{\Delta \circ (\Delta - Id)(P) = X^2 P''}$$

Q3. On a vu que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta(X^k) = kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$, donc :

$$\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}\big(1, X, \dots, X^n\big) \subset \mathbb{R}_n[X].$$

Et ainsi :

$$\boxed{\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X].}$$

Q4. Notons $\mathcal{B}_c = \big(1, X, \dots, X^n\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\Delta_n(X^k) = \Delta(X^k) = kX^k$, donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n) = diag\,\big(0, 1, 2, 3, \dots, n\big)}$$

Q5. On a vu dans la que question 2 que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta \circ (\Delta - Id)(P) = (\Delta^2 - \Delta)(P) = X^2 P''.$$

Donc, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Phi(P) = X^2 P'' + aX P' = (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\,\Delta(P) = \Delta^2(P) + (a-1)\,\Delta(P).$$

Ainsi :

$$\boxed{\Phi = \Delta^2 + (a-1)\,\Delta}$$

Comme $\Delta \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$, on a $\Delta^2 \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$ car $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$ est stable par composition et, comme $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$ est un espace vectoriel, donc stable par combinaisons linéaires, $\Delta^2 + (a-1)\,\Delta \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$, soit :

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)}$$

Q6. D'après la question 3, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

Alors, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ^2 et donc par $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\,\Delta$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\Phi \text{ induit un endomorphisme } \Phi_n \text{ de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q7. On a $\Phi_n = \Delta_n{}^2 + (a-1)\Delta_n$ et $M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n) = diag\left(0, 1, 2, 3, \dots, n\right)$, donc :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n{}^2) = \left(M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n)\right)^2 = diag\left(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2\right).$$

Et :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) &= M_{\mathcal{B}_c}\left(\Delta_n{}^2 + (a-1)\Delta_n\right) = M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n{}^2) + (a-1)M_{\mathcal{B}_c}(\Delta_n) \\ &= diag\left(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2\right) + (a-1)\,diag\left(0, 1, 2, 3, \dots, n\right) \\ &= diag\left(0, 1+(a-1), 2^2+(a-1)2, 3^2+(a-1)3, \dots, n^2+(a-1)n\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de Φ_n dans $\mathcal{B}_c$ est diagonale, donc :

$$\boxed{\Phi_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Q8. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\varphi(P) = X^2P'' + aXP' + bP = \Phi(P) + bP.$$

Donc :

$$\varphi = \Phi + bId.$$

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ (et par Id !), on peut conclure que :

$$\boxed{\varphi \text{ induit un endomorphisme } \varphi_n \text{ de } \mathbb{R}_n[X].}$$

On a immédiatement :

$$\boxed{\varphi_n = \Phi_n + bId_{\mathbb{R}_n[X]} = \Delta_n{}^2 + (a-1)\Delta_n + bId_{\mathbb{R}_n[X]}}$$

Q9. On a :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\varphi_n) = M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n + bId_{\mathbb{R}_n[X]}) = M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) + bM_{\mathcal{B}_c}(Id_{\mathbb{R}_n[X]}) = M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) + bI_{n+1}.$$

Or, on a vu dans la question 7 que :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\Phi_n) = diag\left(0, a, \dots, k^2+(a-1)k, \dots, n^2+(a-1)n\right).$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\varphi_n) = diag\left(0, a, \dots, k^2+(a-1)k, \dots, n^2+(a-1)n\right) + bI_{n+1}$$

Soit :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(\varphi_n) = diag\left(b, a+b, \dots, k^2+(a-1)k+b, \dots, n^2+(a-1)n+b\right)}$$

Q10. Appelons A l'ensemble des racines de (1) appartenant à $[\![0,n]\!]$:

$$A = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ k^2+(a-1)k+b = 0\right\}.$$

Comme la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ est diagonale, de coefficients diagonaux, donc de valeurs propres, les $k^2+(a-1)k+b$ avec $k\in[\![0,n]\!]$, le noyau de φ_n, alias le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, est :

$$\ker\varphi_n=\mathrm{Vect}\left(X^k,\ k\in A\right).$$

Si $A=\{m_1,m_2\}$, alors :

$$\boxed{\ker\varphi_n=\mathrm{Vect}\left(X^{m_1},\,X^{m_2}\right)}$$

Q11. Avec les mêmes notations, si $A=\{m\}$, alors :

$$\boxed{\ker\varphi_n=\mathrm{Vect}\left(X^m\right)}$$

Q12. Remarquons déjà que :

$$\ker\varphi_n=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ \varphi_n(P)=0\}=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P)=0\}=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P\in\ker\varphi\}.$$

Soit $\ker\varphi_n=\mathbb{R}_n[X]\cap\ker\varphi$ et comme $\mathbb{R}[X]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\ker\varphi=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\ker\varphi_n.$$

L'équation (1) est une équation du second degré, donc admet au plus deux solutions réelles.

- Si (1) n'admet aucune solution dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ker\varphi_n=\{0\}$ et donc $\ker\varphi=\{0\}$.
- Si (1) admet une unique solution m dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ker\varphi_n=\{0\}$ quand $n<m$ et $\ker\varphi_n=\mathrm{Vect}\left(X^m\right)$ quand $n\geq m$ donc $\ker\varphi=\mathrm{Vect}\left(X^m\right)$.
- Si (1) admet deux solutions m_1 et m_2 dans $\mathbb{N}$ avec $m_1<m_2$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ker\varphi_n=\{0\}$ quand $n<m_1$ et $\ker\varphi_n=\mathrm{Vect}\left(X^{m_1}\right)$ quand $m_1\leq n<m_2$ et $\ker\varphi_n=\mathrm{Vect}\left(X^{m_1},\,X^{m_2}\right)$ quand $n\geq m_2$, donc $\ker\varphi=\mathrm{Vect}\left(X^{m_1},\,X^{m_2}\right)$.

Ainsi, $\ker\varphi$ est de dimension finie avec :

- Si $\{k\in\mathbb{N},\ k^2+(a-1)k+b=0\}=\varnothing$, $\ker\varphi=\{0\}$ et $\dim\ker\varphi=0$.
- Si $\{k\in\mathbb{N},\ k^2+(a-1)k+b=0\}=\{m\}$, $\ker\varphi=\mathrm{Vect}\left(X^m\right)$ et $\dim\ker\varphi=1$.
- Si $\{k\in\mathbb{N},\ k^2+(a-1)k+b=0\}=\{m_1,m_2\}$, $\ker\varphi_n=\mathrm{Vect}\left(X^{m_1},\,X^{m_2}\right)$ et $\dim\ker\varphi=2$.