Corrigés des TD du chapitre 12

Exercice 1

1) a. Pour tous $p,q\in\mathbb{N}^*$, p et $p-1$ sont deux entiers naturels consécutifs, donc l'un des deux est pair et $p(p-1)$ est un entier naturel pair et $\dfrac{p(p-1)}{2}$ est entier naturel.

Comme q est un entier naturel non nul, $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{p(p-1)}{2}+q\geq q\geq 1$ est bien un entier naturel non nul, donc :

$$\boxed{f \text{ est à images dans } \mathbb{N}^*.}$$

b. Supposons qu'il existe $p,q\in\mathbb{N}^*$ premiers entre eux, tels que $p\geq q\geq 1$ et $\dfrac{p(p-1)}{2}+q=3$.

Comme $p\geq q\geq 1$, on a $0\leq\dfrac{p(p-1)}{2}=3-q\leq 2$, ce qui donne trois possibilités :

- $\dfrac{p(p-1)}{2}=0$, soit $p=1$ et $q=3>p$: exclu (car $p\geq q$) ;
- $\dfrac{p(p-1)}{2}=1$, soit $p^2-p-2=0$, qui donne $p=q=2$: exclu (car p et q sont premiers entre eux) ;
- $\dfrac{p(p-1)}{2}=2$, soit $p^2-p-4=0$: exclu (car cette équation n'admet pas de solution entière).

Finalement, toutes les possibilités sont exclues, donc :

$$\boxed{3 \text{ n'a pas d'antécédent par } f \text{ et ainsi, } f:\mathbb{Q}_1\to\mathbb{N}^* \text{ n'est pas surjective.}}$$

c. i. On a $f(r)=f\left(\dfrac{p}{q}\right)=f(r')=f\left(\dfrac{p'}{q'}\right)$, soit :

$$\begin{aligned}\frac{p(p-1)}{2}+q=\frac{p'(p'-1)}{2}+q' \quad &\Leftrightarrow\quad p'(p'-1)-p(p-1)=2q-2q'\\ &\Leftrightarrow\quad p'^2-p^2-(p'-p)=2(q-q')\\ &\Leftrightarrow\quad (p'+p)(p'-p)-(p'-p)=2(q-q')\\ &\Leftrightarrow\quad (p'-p)(p'+p-1)=2(q-q')\\ &\Rightarrow\quad |p'-p||p'+p-1|=2|q-q'|=2|q'-q|\end{aligned}$$

Et comme $p'\geq p\geq 1$, on a $|p'-p||p'+p-1|=(p'-p)(p'+p-1)$, donc :

$$\boxed{(p'-p)(p+p'-1)=2|q'-q|}$$

ii. On a $p\geq q\geq 1$ et $p'\geq q'\geq 1$, donc :

$$p+p'-1\geq q+q'-1>0\,.$$

Et $(q+q'-1)^2-(q'-q)^2=(2q-1)(2q'-1)>0$, donc :

$$q+q'-1>|q'-q|.$$

Et ainsi :

$$\boxed{p+p'-1>|q'-q|}$$

On a alors $2|q'-q|<2(p+p'-1)$, donc avec $(p'-p)(p+p'-1)=2|q'-q|$, on a :

$$(p'-p)(p+p'-1)<2(p+p'-1).$$

Or, $p+p'-1\geq 1>0$, donc :

$$\boxed{p'-p<2}$$

iii. Par hypothèse, p et p' sont deux entiers, donc $p'-p<2$ se récrit $p'-p\leq 1$ et $p'\geq p$. Alors :

$$0\leq p'-p\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad p'-p=0 \text{ ou } 1.$$

Si $p'-p=1$, alors $p'=p+1$ et la relation $(p'-p)(p'+p-1)=2(q-q')$ se simplifie en $p=q-q'$.

Or, $q'>0$ et donc $p=q-q'$ implique $p<q$, qui est contradictoire. Ainsi, $p'-p\neq 1$, donc $p'-p=0$, soit $p'=p$ et $(p'-p)(p'+p-1)=2(q-q')$ donc aussi $q'=q$.

Ainsi, on a $p'=p$ et $q'=q$, soit :

$$\boxed{r'=r}$$

Nous venons de prouver que si $f(r)=f(r')$, alors $r'=r$, autrement dit que :

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

d. Soit $\tilde{f}:\mathbb{Q}_1\to f(\mathbb{Q}_1)\,;\, r\mapsto f(r)$. Comme f est injective, $\tilde{f}$ l'est aussi. De plus, $\tilde{f}$ est surjective par construction, donc $\tilde{f}$ est bijective. Or, on a vu que $f(\mathbb{Q}_1)\subset\mathbb{N}^*$, donc $f(\mathbb{Q}_1)$ est finie ou dénombrable.

Or, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{p}{1}\right)=\dfrac{p(p-1)}{2}+1\in f(\mathbb{Q}_1)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{p(p-1)}{2}=+\infty$, donc $f(\mathbb{Q}_1)$ est infini et ainsi, $f(\mathbb{Q}_1)$ est dénombrable. Comme $\mathbb{Q}_1$ et $f(\mathbb{Q}_1)$ sont en bijection :

$$\boxed{\mathbb{Q}_1 \text{ est dénombrable.}}$$

e. Posons $\mathbb{Q}_2=\mathbb{Q}\cap\,]0,1]$. L'application inverse est alors une bijection de $\mathbb{Q}_1$ dans $\mathbb{Q}_2$, donc $\mathbb{Q}_2$ est dénombrable. Alors, $\mathbb{Q}_1\cup\mathbb{Q}_2=\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^*$ est dénombrable.

Or, l'application $x\mapsto -x$ est une bijection de $\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_-^*$, donc $\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_-^*$ est dénombrable.

Ainsi, $\mathbb{Q}^* = \left(\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_-^*\right)\cup\left(\mathbb{Q}\cap\mathbb{R}_+^*\right)$ est dénombrable, et rajouter un élément (ici 0) ne change pas le caractère dénombrable d'un ensemble, donc :

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dénombrable.}}$$

2) a. Remarquons préalablement que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$10^n x - 1 < d_n(x) = E(10^n x) \leq 10^n x \quad\Rightarrow\quad x - \frac{1}{10^n} < \frac{d_n(x)}{10^n} \leq x .$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{d_n(x)}{10^n} = x .$$

Remarquons de plus que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$10^n E(x) \leq 10^n x < 10^n \left(E(x)+1\right) \quad\Rightarrow\quad 10^n E(x) \leq d_n(x) < 10^n \left(E(x)+1\right)$$

Or, $10^{n+1}E(x) - 10^n\left(E(x)+1\right) = 10^n\left(9E(x)-1\right) > 0$ car $E(x)\geq 1$. Donc :

$$d_n(x) < 10^n\left(E(x)+1\right) < 10^{n+1}E(x) \leq d_{n+1}(x) .$$

La suite $\left(d_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante avec $d_0(x) = E(x) \geq 1$.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $g(x) = g(y)$. On a alors :

$$\left\{d_n(x), n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{d_n(y), n\in\mathbb{N}\right\} .$$

Avec la stricte croissance des suites $\left(d_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(d_n(y)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ceci implique que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ d_n(x) = d_n(y) .$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d_n(x)}{10^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{d_n(y)}{10^n} \quad\Leftrightarrow\quad x = y .$$

Ainsi, $g(x) = g(y)$ implique $x = y$, donc :

$$\boxed{g \text{ est injective.}}$$

b. Soit $\tilde{g} : [1,+\infty[\,\to g\left([1,+\infty[\right) ; x \mapsto g(x)$. Comme g est injective, $\tilde{g}$ l'est aussi. De plus, $\tilde{g}$ est surjective par construction, donc $\tilde{g}$ est bijective. Alors, comme $[1,+\infty[$ n'est pas dénombrable, $g\left([1,+\infty[\right)$ ne l'est pas non plus. Or, $g\left([1,+\infty[\right)\subset\mathscr{P}(\mathbb{N})$, donc si $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, $g\left([1,+\infty[\right)$ le serait aussi, ce qui est faux. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{P}(\mathbb{N}) \text{ n'est pas dénombrable.}}$$

Exercice 2

1) Toute tribu de E contenant A, contient aussi E, $\overline{A}$ et $\varnothing$.

Si on pose $\mathcal{T} = \{\varnothing, A, \overline{A}, E\}$, on a $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(E)$, $E \in \mathcal{T}$, $E \setminus \varnothing = E$, $E \setminus A = \overline{A}$, $E \setminus \overline{A} = A$, $E \setminus E = \varnothing$ appartiennent à $\mathcal{T}$ et toute union d'éléments de $\mathcal{T}$ est encore dans $\mathcal{T}$.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est une tribu de E contenant A, et $\mathcal{T}$ est inclus dans toute tribu de E contenant A. Ainsi :

$$\boxed{\text{La plus petite tribu de } E \text{ contenant } A \text{ est } \mathcal{T} = \{\varnothing, A, \overline{A}, E\}.}$$

2) Posons $\mathcal{A} = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \overline{A} \text{ est fini ou dénombrable}\}$.

- On a $\overline{E} = \varnothing$ est fini, donc $E \in \mathcal{A}$.
- Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors, A ou $\overline{A}$ est fini ou dénombrable, et c'est aussi le cas de $\overline{A}$ et $\overline{\overline{A}} = A$. Donc, $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, on a :

  $$x \in \overline{A} \quad\Leftrightarrow\quad x \notin A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus x \notin A_n \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \in \overline{A}_n \quad\Leftrightarrow\quad x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n .$$

  Ainsi, $\overline{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$ et donc $\overline{A} \subset \overline{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{A}_n$ est fini ou dénombrable, on a $\overline{A}$ est fini ou dénombrable (car inclus dans $\overline{A}_n$).

  Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A}_n$ n'est ni fini, ni dénombrable, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est fini ou dénombrable (car les A_n sont tous dans $\mathcal{A}$). Dans ce cas, A est une réunion dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables, donc est fini ou dénombrable.

  Ainsi, soit A, soit $\overline{A}$ est fini ou dénombrable, donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Tout ceci prouve que :

$$\boxed{\mathcal{A} = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \overline{A} \text{ est fini ou dénombrable}\} \text{ est une tribu de } E.}$$

3) Posons $\mathcal{A}' = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \overline{A} \text{ est fini}\}$. On a encore :

- On a $\overline{E} = \varnothing$ est fini, donc $E \in \mathcal{A}'$.
- Si $A \in \mathcal{A}'$, alors, A ou $\overline{A}$ est fini, et c'est aussi le cas de $\overline{A}$ et $\overline{\overline{A}} = A$. Donc, $\overline{A} \in \mathcal{A}'$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}'$ et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

  On peut refaire le raisonnement de la question précédente jusqu'à un certain point.

  S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{A}_n$ est fini, on a $\overline{A}$ est fini (car c'est une partie de $\overline{A}_n$).

  Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A}_n$ n'est pas fini, leur intersection $\overline{A}$ peut être infinie (*exemple* : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right]$) et tous les A_n sont finis (car ils sont tous dans $\mathcal{A}'$). Or, la réunion des A_n n'est pas forcément finie (*exemple* : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}$) et ainsi, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ n'appartient pas forcément à $\mathcal{A}'$.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{A}' = \{A \subset E \setminus A \text{ ou } \overline{A} \text{ est fini}\} \text{ n'est pas forcément une tribu de } E.}$$

Exercice 3

1) Appelons A l'évènement « la pièce a donné pile » et B_k = « on obtient une boule blanche au $k^{ième}$ tirage ».

Si on a tiré pile (*resp*. face), il y a dans l'urne k boules blanches (*resp*. noires) et 1 boule noire (*resp*. blanche) juste avant le $k^{ième}$ tirage.

On cherche $P(B_k)$. La loi des probabilités totales donne alors :

$$P(B_k) = P(A)P_A(B_k) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B_k) = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité de tirer une boule blanche au } k^{ième} \text{ tirage est } \frac{1}{2}.}$$

2) On cherche $P_{B_k}(A)$. La formule de Bayes donne alors :

$$P_{B_k}(A) = \frac{P(A)P_A(B_k)}{P(B_k)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{k}{k+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité } p_k \text{ d'avoir obtenu pile, sachant qu'on a tiré une boule blanche au } k^{ième} \text{ tirage est } \frac{k}{k+1}.}$$

3) On cherche $P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k)$. On a :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2 \cap ... \cap B_k) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3 \cap ... \cap B_k) \\ &= ... = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \ldots P_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1}}(B_k) \end{aligned}$$

Or, comme on remet la boule dans l'urne à chaque fois, les tirages sont indépendants les uns des autres, donc pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $P_{B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_i}(B_{i+1}) = P(B_{i+1}) = \frac{1}{2}$ et donc :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k) = P(B_1)P(B_2)P(B_3) \ldots P(B_k) = \frac{1}{2^k}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir } k \text{ boules blanches lors des } k \text{ premiers tirages est } \frac{1}{2^k}.}$$

Exercice 4

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons les évènements :

- A_n = « Alfred l'emporte lors du tir numéro $2n+1$ » ;
- B_n = « Barnabé l'emporte lors du tir numéro $2n+2$ ».

Pour que A_n soit réalisé, il faut que les deux archers ne touchent pas la cible lors des $2n$ premiers essais (Alfred rate n fois et Barnabé aussi) et qu'Alfred l'atteigne au $(2n+1)^{ième}$ tir.

La probabilité qu'Alfred rate la cible est $1-p_1$ et la probabilité que Barnabé rate la cible est $1-p_2$. Les tirs étant indépendants, on a :

$$\boxed{P(A_n)=(1-p_1)^n(1-p_2)^n\,p_1}$$

Pour que B_n soit réalisé, il faut que les deux archers ne touchent pas la cible lors des $2n+1$ premiers essais (Alfred rate $n+1$ et Barnabé rate n fois) et qu'Alfred l'atteigne au $(2n+1)^{ième}$ tir.

Comme ci-dessus, on a alors :

$$\boxed{P(B_n)=(1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n\,p_2}$$

2) Notons *A* (*resp*. *B*) l'évènement Alfred gagne (*resp*. Barnabé gagne).

On a $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ et cette union est disjointe, donc :

$$P(A)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-p_1)^n(1-p_2)^n\,p_1=p_1\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^n .$$

Comme $p_1\in\,]0,1[$ et $p_2\in\,]0,1[$, on a $(1-p_1)(1-p_2)\in\,]0,1[$, donc la série géométrique ci-dessus converge bien et :

$$P(A)=p_1\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=\frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

De la même façon :

$$P(B)=P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\Big)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(B_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(1-p_1)^{n+1}(1-p_2)^n\,p_2=(1-p_1)\,p_2\sum_{n\in\mathbb{N}}\left[(1-p_1)(1-p_2)\right]^n=\frac{p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}.$$

Ainsi :

La probabilité pour qu'Alfred (*resp*. Barnabé) gagne est $\dfrac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}$ (*resp*. $\dfrac{p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}$).

3) Si *C* est l'évènement « le jeu ne se termine jamais », alors (A,B,C) est une système complet d'évènements (deux de ces évènements ne peuvent être réalisée en même temps et l'un ou l'autre est réalisé car le jeu s'arrête quand Alfred ou Barnabé gagne). Alors :

$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$

Or, $P(A)+P(B)=\dfrac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}+\dfrac{p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}=1$, donc $P(C)=0$ et ainsi :

La probabilité pour que le jeu ne se termine jamais est nulle.

4) Le jeu est équitable si et seulement si Alfred et Barnabé ont les mêmes chances de gagner, autrement dit si et seulement si $P(A)=P(B)$.

Or, on a :

$$P(A)=P(B)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}=\frac{p_2-p_1p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}\quad\Leftrightarrow\quad p_1=p_2-p_1p_2\quad\Leftrightarrow\quad p_2=\frac{p_1}{1-p_1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable si et seulement si } p_2 = \frac{p_1}{1-p_1}.}$$

On a $\dfrac{p_1}{1-p_1} = \dfrac{1}{1-p_1} - 1$. Comme $p_1 \in]0,1[$, si $p_1 > 0,5$, on a alors :

$$\frac{1}{2} < p_1 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 - p_1 < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-p_1} - 1 > 1 .$$

Donc la CNS énoncée ci-dessus ne peut être remplie. De plus :

$$\frac{p_1}{1-p_1} = \frac{1}{1-p_1} - 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{1-p_1} > p_2 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 > p_2(1-p_1) \quad \Leftrightarrow \quad P(A) > P(B) .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } p_1 > 0,5 \text{, le jeu est en faveur d'Alfred.}}$$

Exercice 5

1) On a E_n = « on utilise *A* pour la première fois lors du $n^{ième}$ lancer ».

Si $n = 1$, il faut juste choisir *A* initialement, donc $P(E_1) = \dfrac{1}{2}$.

On suppose maintenant que $n \geq 2$.

Pour que E_n se réalise, il faut que l'on ait choisi *B* initialement (probabilité ½) et, s'il y a lieu ($n \geq 3$), obtenu pile aux $n-2$ premiers lancers (tous réalisés avec *B*) et face au $(n-1)^{ième}$ lancer (lui aussi réalisés avec *B*).

Avec la pièce *B*, la probabilité d'obtenir pile est *b* (donc $1-b$ pour face).

Les lancers étant indépendants, on obtient finalement :

$$\boxed{P(E_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{pour } n = 1 \\ \dfrac{1}{2} b^{n-2}(1-b) & \text{pour } n \geq 2 \end{cases}}$$

Notons A_i l'évènement : « on choisit *A* initialement ». La loi des probabilités totales donne alors :

$$P(V_n) = P(A_i)P_{A_i}(V_n) + P(\overline{A_i})P_{\overline{A_i}}(V_n) = \frac{1}{2}P_{A_i}(V_n) + \frac{1}{2}P_{\overline{A_i}}(V_n) .$$

Si on a choisi *A* initialement, alors pour obtenir *n* piles lors des *n* premiers lancers, il ne faut pas changer de pièce, et donc, obtenir *n* piles avec la pièce A (probabilité *a* à chaque lancer, indépendant des autres). Donc :

$$P_{A_i}(V_n) = a^n .$$

De la même façon, on a :

$$P_{\overline{A_i}}(V_n) = b^n .$$

Et donc :

$$\boxed{P(V_n) = \frac{1}{2}(a^n + b^n)}$$

2) Les E_n sont deux à deux disjoints, donc :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(E_n) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{2} b^{n-2}(1-b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-b)\sum_{n\geq 2} b^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-b)\sum_{n\geq 0} b^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-b)\frac{1}{1-b}.$$

Donc :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) = 1}$$

On a V_n = « on a obtenu n piles lors des n premiers lancers », donc :

V_{n+1} = « on a obtenu $n+1$ piles lors des $n+1$ premiers lancers »

= « on a obtenu n piles lors des n premiers lancers <u>et</u> au $(n+1)^{ième}$ lancer »

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_{n+1} \subset V_n$. On a alors :

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(a^n + b^n).$$

Et comme $a, b \in]0,1[$, on obtient :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} V_n\right) = 0}$$

Exercice 6

Notons A_n l'évènement : « la personne n° n reçoit l'information initiale ». On a donc $p_n = P(A_n)$.

Par la loi des probabilités totales, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A}_n)P_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) = p_n p + (1-p_n)(1-p).$$

Soit :

$$\boxed{p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p}$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique. On a :

$$x = (2p-1)x + 1 - p \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

La suite $(p_n - \frac{1}{2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $2p-1$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right).$$

Or, $p_1 = P(A_1) = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{p_n = \frac{1}{2}\left(1 - (2p-1)^{n-1}\right)}$$

On a $p \in]0,1[$, donc $2p-1 \in]-1,1[$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}}$$

Exercice 7

1) Notons P_n (*resp.* Q_n, *resp.* R_n) l'évènement : « la puce est en *P* (*resp. Q*, *resp. R*) au temps *n* ».

On a donc $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$. La loi des probabilités totales donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+1} = P(P_{n+1}) = P(P_n)P_{P_n}(P_{n+1}) + P(Q_n)P_{Q_n}(P_{n+1}) + P(R_n)P_{R_n}(P_{n+1}) = \dfrac{1}{2}q_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ q_{n+1} = P(Q_{n+1}) = P(P_n)P_{P_n}(Q_{n+1}) + P(Q_n)P_{Q_n}(Q_{n+1}) + P(R_n)P_{R_n}(Q_{n+1}) = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(P_n)P_{P_n}(R_{n+1}) + P(Q_n)P_{Q_n}(R_{n+1}) + P(R_n)P_{R_n}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}q_n \end{cases}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2) On a $2A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $(2A+I_3)^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3(2A+I_3)$, ce qui donne $4A^2 = 2A + 2I_3$, soit :

$$\boxed{2A^2 = A + I_3}$$

Comme $\deg\big((X+½)(X-1)\big) = 2$, la division euclidienne de X^n par $(X+½)(X-1)$ s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X^n = (X+½)(X-1)Q_n + \alpha_n X + \beta_n \quad \text{avec } (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2.$$

En évaluant en 1 et $-½$, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n = 1 \\ -½\alpha_n + \beta_n = (-½)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = \dfrac{2}{3}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right] \\ \beta_n = \dfrac{1}{3}\left[1 + 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right] \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{Le reste de la division euclidienne de } X^n \text{ par } (X+½)(X-1) \text{ est } \frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]X + \frac{1}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].}$$

On a $P = 2(X+½)(X-1) = 2X^2 - X - 1$, donc $P(A) = 0_3$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{2}P(A)Q_n(A) + \alpha_n A + \beta_n I_3 = \alpha_n A + \beta_n I_3.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]A + \frac{1}{3}\left[1+2\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]I_3}$$

3) Comme $P(A)=0_3$ avec $P=2(X+½)(X-1)$, on a $Sp(A)\subset\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$.

Cherchons les éventuels vecteurs propres.

D'une part :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+y+z=0\\x-2y+z=0\\x+y-2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}E_{-½}=\ker\left(A+\frac{1}{2}I_3\right)=\mathrm{Vect}(e_1,e_2)\ \text{ avec }\ e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\\ E_1=\ker(A-I_3)=\mathrm{Vect}(e_3)\ \text{ avec }\ e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{array}}$$

Comme on est en dimension 3 et $\dim E_{-½}+\dim E_1=3$, A est diagonalisable et on a :

$$\begin{pmatrix}-½&0&0\\0&-½&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P^{-1}AP\ \text{ avec }\ P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\ \text{ et }\ P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n=P\begin{pmatrix}(-½)^n&0&0\\0&(-½)^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

Et, en faisant le calcul, on retrouve bien le résultat de la question précédente, soit :

$$\boxed{A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2(-½)^n&1-(-½)^n&1-(-½)^n\\1-(-½)^n&1+2(-½)^n&1-(-½)^n\\1-(-½)^n&1-(-½)^n&1+2(-½)^n\end{pmatrix}}$$

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et :

- $X_0 = I_3 X_0 = A^0 X_0$.
- Si $X_n = A^n X_0$, alors $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$, soit :

$$X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} p_0 + q_0 + r_0 \\ p_0 + q_0 + r_0 \\ p_0 + q_0 + r_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2p_0 - q_0 - r_0 \\ -p_0 + 2q_0 + r_0 \\ -p_0 - q_0 + 2r_0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, $p_0 + q_0 + r_0 = 1$, donc :

$$X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2p_0 - q_0 - r_0 \\ -p_0 + 2q_0 + r_0 \\ -p_0 - q_0 + 2r_0 \end{pmatrix}.$$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} X_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ qui ne dépend pas de } X_0.}$$

Exercice 8

1) Posons $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n = A_n \cup B_{n+1}$, donc $B_{n+1} \subset B_n$ et par continuité décroissante, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right).$$

Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = P(A)}$$

2) a. Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$ converge, la série $\sum_{k \geq n} P(A_k)$ converge aussi et par sous additivité, on a :

$$0 \leq P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

Or, pour $n \geq 1$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ est le reste d'ordre $n-1$ de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = 0$. Alors, d'après la première question et le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{P(A) = 0}$$

b. L'issue ω appartient à une infinité de A_n s'il existe une suite extraite $(A_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\omega \in A_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit, telle que $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\varphi(n)}$.

Or, φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$, ce qui implique que $A_{\varphi(n)} \subset \bigcup_{k \geq n} A_k$. Alors, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\varphi(n)} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = A$ et donc :

$$0 \leq P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\varphi(n)}\right) \leq P(A) = 0 .$$

Ainsi, $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\varphi(n)}\right) = 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La probabilité que } \omega \text{ appartienne à une infinité de } A_n \text{ est nulle.}}$$

3) a. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$.

Comme les A_n sont mutuellement indépendants, les $\overline{A}_n$ le sont aussi, donc :

$$P\left(\bigcap_{n\leq k\leq m} \overline{A}_k\right) = \prod_{n\leq k\leq m} P(\overline{A}_k) = \prod_{n\leq k\leq m} [1 - P(A_k)] .$$

Or, pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$, donc avec $x = -P(A_k)$, on obtient $1 - P(A_k) \leq e^{-P(A_k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Avec $1 - P(A_k) \geq 0$, on a alors :

$$P\left(\bigcap_{n\leq k\leq m} \overline{A}_k\right) = \prod_{n\leq k\leq m} [1 - P(A_k)] \leq \prod_{n\leq k\leq m} e^{-P(A_k)} .$$

Soit :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n\leq k\leq m} \overline{A}_k\right) \leq e^{-\sum_{n\leq k\leq m} P(A_k)}}$$

b. On a :

$$\overline{A} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A}_k\right) .$$

Si on pose $C_n = \bigcap_{k\geq n} \overline{A}_k$, alors on a $C_n = \overline{A}_n \cap C_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $C_n \subset C_{n+1}$ et par continuité croissante, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A}_k\right)\right) = P(\overline{A}) .$$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ diverge (avec $P(A_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n}^{m} P(A_k) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to+\infty} e^{-\sum_{n\leq k\leq m} P(A_k)} = 0 .$$

Avec la question a, ceci implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{m\to+\infty} P\left(\bigcap_{n\leq k\leq m} \overline{A}_k\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(C_n) = P\left(\bigcap_{k\geq n} \overline{A}_k\right) = 0 .$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} P(C_n) = P(\overline{A})$, on a immédiatement $P(\overline{A}) = 0$, soit :

$$\boxed{P(A) = 1}$$

Exercice 9

Pour obtenir pile pour la première fois au $k^{\text{ième}}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, il faut avoir obtenu $k-1$ faces aux lancers précédentes et pile au $k^{\text{ième}}$. Les lancers étant indépendants, la probabilité de cet évènement est

$p_k = (1-p)^{k-1} p$. On a alors :

$$P(A) = \sum_{k\geq 1} p_{2k} = \sum_{k\geq 1} (1-p)^{2k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k\geq 1} \left[(1-p)^2 \right]^k = \frac{p}{1-p} \frac{1}{1-(1-p)^2}$$

$$P(B) = \sum_{k\geq 1} p_{3k} = \sum_{k\geq 1} (1-p)^{3k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k\geq 1} \left[(1-p)^3 \right]^k = \frac{p}{1-p} \frac{1}{1-(1-p)^3}$$

Et :

$A \cap B$ = « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers pair et multiple de 3 »

= « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6 ».

Donc :

$$P(A\cap B) = \sum_{k\geq 1} p_{6k} = \frac{p}{1-p} \frac{1}{1-(1-p)^6} = \frac{p}{1-p} \frac{1}{\left[1-(1-p)^3\right]\left[1+(1-p)^3\right]} = \frac{P(B)}{1+(1-p)^3}.$$

Donc :

$$P(A\cap B) = P(A)P(B) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+(1-p)^3} = \frac{p}{1-p}\frac{1}{1-(1-p)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (1-p)\left[1-(1-p)^2\right] = p\left[1+(1-p)^3\right].$$

Or :

$$(1-p)\left[1-(1-p)^2\right] = p(1-p)(2-p)$$

$$p\left[1+(1-p)^3\right] = p(1-p+p^2)(2-p)$$

Donc $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ pour $p=0$ qui est exclu. Finalement :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants pour tout } p \in \left]0,1\right[.}$$

Exercice 10

1) Pour que les n premières boules soient rouges, il faut n'avoir obtenu que des boules rouges.

Si, pour $k \in \mathbb{N}^*$, R_k est l'évènement « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ième}}$ tirage », alors la probabilité p_n que les n premières boules soient rouges est :

$$p_n = P\left(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n\right) = P\left(R_1\right) P_{R_1}\left(R_2\right) P_{R_1\cap R_2}\left(R_3\right) \ldots P_{R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_{n-1}}\left(R_n\right).$$

A chaque tirage d'une boule rouge, on rajoute 2 boules rouges donc, après avoir obtenu la $k^{\text{ième}}$ boule rouge, il y a $2k+2$ boules dont $2k+1$ rouges dans l'urne et :

$$P_{R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_k}\left(R_{k+1}\right) = \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Alors :

$$p_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que les } n \text{ premières boules soient rouges } p_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.}$$

2) La probabilité de toujours tirer une boule rouge est alors $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

On a $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc :

$$p_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n \times 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$ (ce qui n'est pas très inattendu !)

$\boxed{\text{La probabilité de toujours tirer une boule rouge est nulle.}}$