

Corrigés des TD du chapitre 14

Exercice 1

1) La variable X suit une loi géométrique de paramètre p (par définition d'une loi géométrique). Son espérance est alors $E(X) = \frac{1}{p}$.

2) Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X = n, Y = n + k) = P(X = n)P_{(X=n)}(Y = n + k).$$

Or, l'expérience est répétée de manière indépendante, donc si le premier succès a lieu au rang n , le succès suivant peut être vu comme le premier succès à partir de la $(n+1)^{\text{ième}}$ répétition de l'expérience, donc son rang suivra (comme X) une loi géométrique de paramètre p . Ainsi, $P_{(X=n)}(Y = n + k) = (1-p)^{k-1} p$ et donc :

$$P(X = n, Y = n + k) = (1-p)^{n-1} p(1-p)^{k-1} p.$$

Soit, pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n, Y = n + k) = (1-p)^{n+k-2} p^2$$

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a :

$$P(Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i, Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} p^2 = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$$

Remarquons que $P(Y = 1) = 0$, ce qui est compatible avec la formule ci-dessus.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y = k) = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2$$

On a alors :

$$G_Y(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(Y = k) t^k = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)(1-p)^{k-2} p^2 t^k = p^2 t^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) [(1-p)t]^{k-2} = p^2 t^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k [(1-p)t]^{k-1}.$$

Soit $G_Y(t) = p^2 t^2 f'((1-p)t)$ avec $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

La série entière f est définie et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$, avec :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc G_Y est définie sur $\left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$ et :

$$G_Y(t) = \frac{p^2 t^2}{(1-(1-p)t)^2}$$

La fonction G_Y est définie et de classe C^∞ sur $\left] -\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$ et :

$$G_Y'(t) = \frac{2p^2 t}{(1-(1-p)t)^3} \quad G_Y''(t) = 2p^2 \frac{1+2(1-p)t}{(1-(1-p)t)^4}.$$

On a $E(Y) = G_Y'(1) = \frac{2p^2}{(1-(1-p))^3}$, soit :

$$E(Y) = \frac{2}{p}$$

Et :

$$V(Y) = G_Y''(1) + G_Y'(1) - G_Y'(1)^2 = 2p^2 \frac{1+2(1-p)}{(1-(1-p))^4} + \frac{2}{p} - \frac{4}{p^2}.$$

Soit :

$$V(Y) = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

Exercice 2

1) a. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc X et Y prennent un nombre fini de valeurs. Il en va alors de même pour Z et T , donc :

Z et T admettent des moments de tous ordres.

b. On a $Z = |X - Y|$ et, comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, on a aussi $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $(Z = k) = (|X - Y| = k) = (X - Y = k) \cup (X - Y = -k) = (X = Y + k) \cup (Y = X + k)$ et comme $k > 0$, l'union est disjointe.

Alors, comme X et Y sont indépendantes et suivent la même loi uniforme sur $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{n-k} P(X = i+k, Y = i) + \sum_{i=0}^{n-k} P(X = i, Y = i+k) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} P(X = i+k)P(Y = i) + \sum_{i=0}^{n-k} P(X = i)P(Y = i+k) \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \\ &= 2 \frac{n-k+1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Enfin :

$$P(Z = 0) = P(X = Y) = \sum_{i=0}^n P(X = i, Y = i) = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^n k P(Z=k) = \sum_{k=1}^n k \frac{2(n-k+1)}{(n+1)^2} = \frac{2}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n k(n+1-k) \\ &= \frac{2}{(n+1)^2} \left[(n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right] = \frac{2}{(n+1)^2} \left[(n+1) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \frac{n}{3(n+1)} [3(n+1) - (2n+1)] \end{aligned}$$

Soit :

$$E(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$$

c. On a $E(X) = E(Y) = \frac{n}{2}$ et :

$$T = \inf(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y - |X - Y|) = \frac{1}{2}(X + Y - Z).$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(T) = \frac{1}{2}(E(X) + E(Y) - E(Z)) = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n(n+2)}{3(n+1)} \right) = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{n+2}{3(n+1)} \right).$$

Soit :

$$E(T) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$$

On a alors :

$$E(T) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

2) a. On a $U(\Omega) \subset \llbracket 0, K \rrbracket$ et :

$$\sum_{k=1}^K P(U \geq k) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=k}^K P(U=i) = \sum_{1 \leq k \leq i \leq K} P(U=i) = \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^i P(U=i) = \sum_{i=1}^K i P(U=i) = \sum_{i=0}^K i P(U=i).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^K P(U \geq k) = E(U)$$

Remarquons que cette question est une question de cours.

b. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K k^2 P(U \geq k) &= \sum_{k=1}^K \left(k^2 \sum_{i=k}^K P(U=i) \right) = \sum_{1 \leq k \leq i \leq K} k^2 P(U=i) = \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^i k^2 P(U=i) = \sum_{i=1}^K \left(P(U=i) \sum_{k=1}^i k^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^K \left(P(U=i) \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} \right) = \frac{1}{6} \left[2 \sum_{i=0}^K P(U=i) i^3 + 3 \sum_{i=1}^K P(U=i) i^2 + \sum_{i=1}^K P(U=i) i \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^K k^2 P(U \geq k) = \frac{2E(U^3) + 3E(U^2) + E(U)}{6}$$

3) a. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a (toujours avec X et Y indépendantes) :

$$P(T \geq k) = P(\inf(X, Y) \geq k) = P((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = P(X \geq k)P(Y \geq k).$$

Et on a :

$$P(X \geq k) = P(Y \geq k) = \begin{cases} 1 & \text{quand } k < 0 \\ \frac{n+1-k}{n+1} & \text{quand } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{quand } k > n \end{cases}$$

Donc :

$$P(T \geq k) = \begin{cases} 1 & \text{quand } k < 0 \\ \left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^2 & \text{quand } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{quand } k > n \end{cases}$$

b. D'après la question 2.a, on a :

$$E(T) = \sum_{k=1}^n P(T \geq k) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+1-k}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (n+1-k)^2 \stackrel{k'=n+1-k}{=} \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k'=1}^n k'^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ainsi :

$$\text{On retrouve bien } E(T) = \frac{n(2n+1)}{6(n+1)} \text{ trouvé dans la question 1.c.}$$

4) On a $Z^2 = |X - Y|^2 = (X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$ et par linéarité de l'espérance :

$$E(Z^2) = E(X^2 - 2XY + Y^2) = E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2).$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$, donc :

$$E(Z^2) = E(X^2 - 2XY + Y^2) = E(X^2) - 2E(X)E(Y) + E(Y^2).$$

Et comme X et Y sont indépendantes et suivent la même loi, $E(X) = E(Y)$ et $E(X^2) = E(Y^2)$, donc :

$$E(Z^2) = 2E(X^2) - 2E(X)^2.$$

Soit :

$$E(Z^2) = 2V(X)$$

Exercice 3

1) Remarquons préalablement la longueur de la première série de lancers ayant tous donné le même résultat peut aller de 1 (quand le deuxième lancer donne un résultat différent du premier) à l'infini quand tous les lancers donne le même résultat. Ainsi, $L(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(L = n)$ se réalise quand les n premiers lancers donnent le même résultat et pas le $(n+1)^{\text{ième}}$. Il y a deux possibilités disjointes : soit n piles suivi d'un face (probabilité : $p^n q$), soit n faces suivi d'un pile (probabilité : $q^n p$).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(L = n) = p^n q + q^n p$$

2) On a alors :

$$E(L) = \sum_{n \geq 1} n P(L = n) = \sum_{n \geq 1} n (p^n q + q^n p) = pq \left(\sum_{n \geq 1} n p^{n-1} + \sum_{n \geq 1} n q^{n-1} \right) = \frac{pq}{(1-p)^2} + \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{p(1-p)}{(1-p)^2} + \frac{p(1-p)}{p^2}.$$

Donc :

$$E(L) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$$

3) On peut écrire $E(L) = g\left(\frac{1-p}{p}\right)$ avec $g(x) = x + \frac{1}{x}$.

Comme $p \in]0, 1[$, on a $\frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(x) = x + \frac{1}{x} = 2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 2.$$

Ainsi, on a bien :

$$E(L) \geq 2$$

On a $g(x) = 2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 = 2$ si et seulement si $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, soit $x = 1$. Donc :

$$E(L) = 2 \Leftrightarrow g\left(\frac{1-p}{p}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{1-p}{p} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p} = 2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$E(L) = 2 \text{ si et seulement si la pièce est équilibrée } (p = \frac{1}{2}).$$

4) On a :

$$E(L^2) = \sum_{n \geq 1} n^2 P(L = n) = \sum_{n \geq 1} n^2 (p^n q + q^n p) = pq \left(\sum_{n \geq 1} n^2 p^{n-1} + \sum_{n \geq 1} n^2 q^{n-1} \right).$$

Or, $\sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$, donc :

$$E(L^2) = pq \left(\frac{1+p}{(1-p)^3} + \frac{1+q}{(1-q)^3} \right) = \frac{p(1-p)(1+p)}{(1-p)^3} + \frac{p(1-p)(2-p)}{p^3} = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2}.$$

Et :

$$\begin{aligned} V(L) &= E(L^2) - E(L)^2 = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \left(\frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} \right)^2 \\ &= \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \frac{p^2}{(1-p)^2} - 2 - \frac{(1-p)^2}{p^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$V(L) = \frac{p}{(1-p)^2} + \frac{1-p}{p^2} - 2$$

On cherche un entier ℓ tel que $P(L \leq \ell) \geq 0,99$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a pour tout réel $a > 0$:

$$P(|L - E(L)| \geq a) \leq \frac{V(L)}{a^2} \Leftrightarrow P(|L - E(L)| < a) > \frac{V(L)}{a^2} \Leftrightarrow P(E(L) - a < L < E(L) + a) > \frac{V(L)}{a^2}.$$

Comme $L(\Omega) = \mathbb{N}^*$, si on choisit a tel que $E(L) - a \leq 1$, soit $a \geq E(L) - 1$ ($E(L) - 1 > 0$ car $E(L) \geq 2$), on a :

$$P(L < E(L) + a) > \frac{V(L)}{a^2}.$$

Et si on choisit a tel que $\frac{V(L)}{a^2} \geq 0,99$, soit $a \leq \sqrt{\frac{V(L)}{0,99}}$, alors on a $P(L < E(L) + a) \geq 0,99$.

Peut-on avoir $E(L) - 1 \leq a \leq \sqrt{\frac{V(L)}{0,99}}$? La réponse est oui si $E(L) - 1 \leq \sqrt{\frac{V(L)}{0,99}}$, donc si :

$$V(L) - 0,99(E(L) - 1)^2 \geq 0.$$

$$\text{On a } V(L) - 0,99(E(L) - 1)^2 = \frac{p}{(1-p)^2} + \frac{1-p}{p^2} - 2 - 0,99 \left(\frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 1 \right)^2.$$

Le tracé de la fonction de p correspondante montre que l'expression ci-dessus est positive pour tout $p \in]0,1[$, et donc :

$$\text{Pour tout } a \in \left[E(L) - 1; \sqrt{\frac{V(L)}{0,99}} \right], \text{ on a } P(L < \ell) \geq 0,99 \text{ avec } \ell = E(L) + a.$$

Exercice 4

1) Dans le sac, il y a N jetons numérotés de 1 à N , donc N numéros distincts possibles. Comme T_n donne le nombre de numéros distincts obtenus à l'issue des n premiers tirages :

Les valeurs possibles de T_n sont les entiers entre 1 et n quand $n \leq N$ et entre 1 et N quand $n \geq N$.

Comme on procède à n tirages avec remise (donc successifs) d'un jeton parmi N , il y a N^n possibilités pour les n premiers tirages et ces possibilités sont équiprobables.

L'évènement $(T_n = 1)$ est l'évènement : « Le même numéro est sorti à l'issue de chacun des n tirages ».

Comme il y a N numéros possibles, on a :

$$P(T_n = 1) = \frac{N}{N^n} = \frac{N}{N^{n-1}}.$$

L'évènement $(T_n = 2)$ est l'évènement : « Seuls deux numéros distincts sont sortis à l'issue des n tirages ».

Comme il y a $N \geq 2$ numéros possibles, on a $\binom{N}{2}$ possibilités de choisir deux numéros distincts.

Une fois ces deux numéros choisis, il faut choisir le nombre d'apparitions du plus petit (au moins 1 et au plus $n-1$), ainsi que les positions de ces apparitions. Ceci revient à choisir une partie de l'ensemble des n tirages (non vide et différente de l'ensemble entier) : il y en a $2^n - 2$. Alors :

$$P(T_n = 2) = \frac{1}{N^n} \binom{N}{2} (2^n - 2) = \frac{1}{N^n} \frac{N(N+1)}{2} (2^n - 2) = \frac{N+1}{N^{n-1}} (2^{n-1} - 1).$$

L'évènement $(T_n = n)$ est l'évènement : « Les n numéros tirés sont tous distincts deux à deux ».

Il est immédiat que si $n > N$, $P(T_n = n) = 0$.

Si $n \leq N$, il faut choisir, dans l'ordre, n numéros distincts parmi les N possibles : c'est un arrangement et on obtient :

$$P(T_n = n) = \frac{1}{N^n} \frac{N!}{(N-n)!}.$$

Finalement :

$P(T_n = 1) = \frac{N}{N^{n-1}} \quad P(T_n = 2) = \frac{N+1}{N^{n-1}} (2^{n-1} - 1) \quad P(T_n = n) = \begin{cases} \frac{1}{N^n} \frac{N!}{(N-n)!} & \text{quand } n \leq N \\ 0 & \text{quand } n > N \end{cases}$
--

2) Avec la loi des probabilités totales, on a :

$$P(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^N P(T_n = i) P_{(T_n=i)}(T_{n+1} = k).$$

Or, si $i \neq k-1$ et $i \neq k$, on ne peut avoir $T_{n+1} = k$ quand $T_n = i$, donc $P_{(T_n=i)}(T_{n+1} = k) = 0$. Ainsi :

$$P(T_{n+1} = k) = P(T_n = k-1) P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) + P(T_n = k) P_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k).$$

Si $T_n = k-1$, $k-1$ numéros distincts sont sortis au cours des n premiers tirages, donc il en reste $N - (k-1)$ autres possibles et pour avoir $T_{n+1} = k$, il faut que le numéro choisi au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage soit l'un de ces $N - (k-1)$ numéros restants : il a donc $N - (k-1)$ chances sur N d'en obtenir un, soit :

$$P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1} = k) = \frac{N - (k-1)}{N}.$$

Si $T_n = k$, k numéros distincts sont sortis au cours des n premiers tirages, et pour avoir $T_{n+1} = k$, il faut que le numéro choisi au $(n+1)^{\text{ième}}$ tirage soit l'un de ces k numéros : il a donc k chances sur N d'en obtenir un, soit :

$$P_{(T_n=k)}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}.$$

Ainsi :

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{N - (k-1)}{N} P(T_n = k-1) + \frac{k}{N} P(T_n = k)$$

3) a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} NG_{n+1}(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} N P(T_{n+1} = k) X^k = \sum_{k=1}^{n+1} \left[(N - (k-1)) P(T_n = k-1) + k P(T_n = k) \right] X^k \\ &= N \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n = k-1) X^k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) P(T_n = k-1) X^k + \sum_{k=1}^{n+1} k P(T_n = k) X^k \\ &= N \sum_{k=0}^n P(T_n = k) X^{k+1} - \sum_{k=0}^n k P(T_n = k) X^{k+1} + \sum_{k=1}^{n+1} k P(T_n = k) X^k \end{aligned}$$

Remarquons qu'au moins un numéro sort, donc $P(T_n = 0) = 0$ et que, à l'issue de n tirages, on ne peut avoir obtenu $n+1$ numéros distincts, donc $P(T_n = n+1) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} NG_{n+1} &= N \sum_{k=1}^n P(T_n = k) X^{k+1} - \sum_{k=1}^n k P(T_n = k) X^{k+1} + \sum_{k=1}^n k P(T_n = k) X^k \\ &= (X - X^2) \sum_{k=1}^n k P(T_n = k) X^{k-1} + NX \sum_{k=1}^n P(T_n = k) X^k \end{aligned}$$

Soit avec $G_n = \sum_{k=1}^n P(T_n = k) X^k$, donc $G_n' = \sum_{k=1}^n k P(T_n = k) X^{k-1}$:

$$NG_{n+1} = (X - X^2)G_n' + NXG_n$$

b. Remarquons que $G_{T_n}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n = k) t^k$, mais si $k > \min(n, N)$, $P(T_n = k) = 0$, donc :

$$G_{T_n}(t) = \sum_{k=1}^{\min(n, N)} P(T_n = k) t^k.$$

Et, si $n > N$, $\sum_{k=N+1}^n P(T_n = k) X^k = 0$, donc $G_n(X) = \sum_{k=1}^N P(T_n = k) X^k$, et ainsi :

$$G_n(X) = \sum_{k=1}^{\min(n, N)} P(T_n = k) X^k$$

Finalement, on a :

$$G_{T_n}(t) = G_n(t).$$

Donc :

$$G_n(1) = G_{T_n}(1) = 1 \quad \text{et} \quad G_n'(t) = G_{T_n}'(t) = E(T_n).$$

En dérivant la relation obtenue dans la question précédente, on obtient :

$$NG_{n+1}' = (1 - 2X)G_n' + (X - X^2)G_n'' + NG_n + NXG_n'.$$

Et en évaluant en 1, on aboutit à :

$$NG_{n+1}'(1) = -G_n'(1) + NG_n(1) + NXG_n'(1) \Leftrightarrow NE(T_{n+1}) = -E(T_n) + N + NE(T_n).$$

Soit :

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$$

La suite $(E(T_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

Comme $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right)x + 1$ équivaut à $x = N$, on pose $u_n = E(T_n) - N$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors géométrique de raison $1 - \frac{1}{N}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} u_1$, soit :

$$E(T_n) = N + (E(T_1) - N) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}.$$

Or, T_1 est le nombre de numéros obtenus après 1 tirage, donc on a toujours $T_1 = 1$ ($T_1(\Omega) = \{1\}$ et $P(T_1 = 1) = 1$), donc $E(T_1) = 1$ et ainsi :

$$E(T_n) = N + (1 - N) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$$

c. Enfin, on a :

$$\frac{E(T_n)}{N} = 1 + \left(\frac{1}{N} - 1\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

Comme $N \geq 2$, on a $0 < 1 - \frac{1}{N} < 1$, et donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(T_n)}{N} = 1$$

Exercice 5

1) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n donne :

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or, comme les X_k sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p :

- $E(S_n) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{p + \dots + p}{n} = p.$
- $V(S_n) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n) = \frac{V(X_1) + \dots + V(X_n)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, $0 \leq P(|S_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ et d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|S_n - p| \geq \varepsilon) = 0$$

2) On a $X_{n+1}(\Omega) = X_n(\Omega) = \{0, 1\}$, donc $Y_n(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ et, toujours avec la mutuelle indépendance des X_k , et la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$\begin{aligned} P(Y_n = 0) &= P(X_n = 0, X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0) = (1-p)^2 \\ P\left(Y_n = \frac{1}{2}\right) &= P(X_n = 0, X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1, X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0) = 2p(1-p) \\ P(Y_n = 1) &= P(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 1) = p^2 \end{aligned}$$

D'où la loi :

Y_n	0	$\frac{1}{2}$	1
probabilité	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

On a alors :

$$E(Y_n) = 0 \times P(Y_n = 0) + \frac{1}{2} \times P\left(Y_n = \frac{1}{2}\right) + 1 \times P(Y_n = 1) = p(1-p) + p^2.$$

Soit :

$$E(Y_n) = p$$

Remarquons que l'on aurait pu écrire $E(Y_n) = E\left(\frac{X_{n+1} + X_n}{2}\right) = \frac{E(X_{n+1}) + E(X_n)}{2} = \frac{p + p}{2} = p$.

3) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < n$ et $a, b \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. On a :

$$\begin{aligned} P(Y_m = a, Y_n = b) &= P(X_m + X_{m+1} = 2a, X_n + X_{n+1} = 2b) \\ &= \sum_{i, j \in \{0, 1\}} P(X_m = i, X_{m+1} = 2a - i, X_n = j, X_{n+1} = 2b - j) \end{aligned}$$

Si $m+1 < n$, alors X_m, X_{m+1}, X_n et X_{n+1} sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} P(Y_m = a, Y_n = b) &= \sum_{i, j \in \{0, 1\}} P(X_m = i)P(X_{m+1} = 2a - i)P(X_n = j)P(X_{n+1} = 2b - j) \\ &= \sum_{i, j \in \{0, 1\}} P(X_m = i, X_{m+1} = 2a - i)P(X_n = j, X_{n+1} = 2b - j) \\ &= P(X_m + X_{m+1} = 2a)P(X_n + X_{n+1} = 2b) = P(Y_m = a)P(Y_n = b) \end{aligned}$$

Donc Y_m et Y_n sont indépendantes.

Par contre, si $m+1 = n$, on a par exemple :

$$P(Y_m = 0, Y_{m+1} = 0) = P(X_m = 0, X_{m+1} = 0, X_{m+2} = 0) = (1-p)^3 \neq (1-p)^4 = P(Y_m = 0)P(Y_{m+1} = 0).$$

Donc Y_m et Y_{m+1} ne sont pas indépendantes.

Finalement :

$$Y_m \text{ et } Y_n \text{ sont indépendantes si et seulement si } m+1 < n.$$

4) Reprenons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à T_n . Pour tout entier $n \geq 3$ et tout réel $\varepsilon > 0$:

$$P(|S_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}.$$

On a $E(T_n) = \frac{E(Y_1) + \dots + E(Y_n)}{n} = p$ et :

$$\begin{aligned} V(T_n) &= E(T_n^2) - E(T_n)^2 = \frac{1}{n^2} E((Y_1 + \dots + Y_n)^2) - p^2 \\ &= \frac{1}{n^2} E\left(Y_1^2 + \dots + Y_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_i Y_j\right) - p^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \left(E(Y_1^2) + \dots + E(Y_n^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i Y_{i+1}) + 2 \sum_{1 \leq i < j-1 \leq n-1} E(Y_i Y_j) \right) - p^2 \end{aligned}$$

Les Y_i suivent toutes la même loi, donc les Y_i^2 et $E(Y_1^2) = \dots = E(Y_n^2)$.

Les $Y_i Y_{i+1}$ suivent toutes la même loi, donc les Y_i^2 et $E(Y_1 Y_2) = \dots = E(Y_{n-1} Y_n)$.

Dans la dernière somme, Y_i et Y_j sont indépendantes, donc $E(Y_i Y_j) = E(Y_i)E(Y_j) = p^2$ et :

$$\sum_{1 \leq i < j-1 \leq n-1} E(Y_i Y_j) = \sum_{1 \leq i < j-1 \leq n-1} p^2 = \sum_{j=3}^n \sum_{i=1}^{j-2} p^2 = \left(\sum_{j=3}^n (j-2) \right) p^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-2} k \right) p^2 = \frac{(n-2)(n-1)}{2} p^2 = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} p^2.$$

Ainsi :

$$V(T_n) = \frac{1}{n^2} \left(nE(Y_1^2) + 2(n-1)E(Y_1 Y_2) + 2 \frac{n^2 - 3n + 2}{2} p^2 \right) - p^2 = \frac{E(Y_1^2) + 2E(Y_1 Y_2) - 3p^2}{n} - 2 \frac{p^2 - E(Y_1 Y_2)}{n^2}.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0$ et comme $0 \leq P(|S_n - E(T_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$, on a bien, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|T_n - p| \geq \varepsilon) = 0$$

Exercice 6

1) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq P(X > n) \leq 1$ donc $0 \leq |P(X > n)t^n| \leq |t|^n$.

Or, si $|t| < 1$, la série géométrique $\sum |t|^n$ converge, donc $\sum |P(X > n)t^n|$ converge.

Ainsi, pour tout $t \in]-1, 1[$, la série $\sum P(X > n)t^n$ est absolument convergente donc convergente et ainsi :

$$\text{La série entière } \sum P(X > n)t^n \text{ a un rayon de convergence au moins égal à 1.}$$

2) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $t \in]-1, 1[$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N P(X > n)t^n &= \sum_{n=0}^N [1 - P(X \leq n)]t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{n=0}^N P(X \leq n)t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=0}^n P(X = k) \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N P(X = k)t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{k=0}^N \left(P(X = k) \sum_{n=k}^N t^n \right) = \sum_{n=0}^N t^n - \sum_{k=0}^N \left(P(X = k)t^k \frac{1-t^{N-k+1}}{1-t} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^N P(X > n) t^n = \sum_{n=0}^N t^n - \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^N P(X = k) t^k + \frac{t^{N+1}}{1-t} \sum_{k=0}^N P(X = k).$$

Avec $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^{N+1}}{1-t} \sum_{k=0}^N P(X = k) \right) = 0$ et, quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n - \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k.$$

Soit :

$$H(t) = \frac{1 - G_X(t)}{1-t}$$

3) Si X admet une espérance finie, alors G_X est dérivable à gauche en 1 et $E(X) = G_X'(1)$.

On admet que si G_X est dérivable à gauche en 1, alors X admet une espérance finie et $E(X) = G_X'(1)$.

Ainsi, X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et, dans ce cas :

$$E(X) = G_X'(1).$$

Or, on a pour tout $t \in]-1, 1[$, $H(t) = \frac{G_X(t) - 1}{t - 1}$, donc G_X est dérivable à gauche en 1 si et seulement si H admet une limite à gauche en 1 et dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow 1^-} H(t) = G_X'(1)$.

Ainsi :

X admet une espérance finie si et seulement si H admet une limite à gauche en 1 et dans ce cas, $E(X) = \lim_{t \rightarrow 1^-} H(t)$.

Exercice 7

1) Quand $N = j$ avec $j \in \mathbb{N}$, la réaction a produit j électrons. Chaque électron a une probabilité p d'être efficace (donc $1-p$ de ne pas l'être), indépendamment des autres. On est en présence d'un schéma de Bernoulli e :

Le nombre X d'électrons efficaces suit une loi binomiale de paramètres j et p .

2) Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, on a $P(N = j, X = k) = 0$ quand $k > j$ et quand $k \leq j$:

$$P(N = j, X = k) = P(N = j) P_{(N=j)}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}.$$

Soit, pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$:

$$P(N = j, X = k) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j p^k (1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!} & \text{quand } k \leq j \\ 0 & \text{quand } k > j \end{cases}$$

3) D'après la formule des probabilités totales, on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(N = j, X = k) = \sum_{j=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j p^k (1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!} = e^{-\lambda} \frac{p^k \lambda^k}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\lambda^{j-k} (1-p)^{j-k}}{(j-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} = e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi :

X suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

On a immédiatement :

$$E(X) = V(X) = p\lambda$$

Remarquons que l'on montre comme pour X que Y suit une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$.

4) Soit $(k, k') \in \mathbb{N}^2$. On a $X + Y = N$, donc :

$$P(X = k, Y = k') = P(N = k + k', X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+k'} p^k (1-p)^{k'}}{k!k'!}.$$

Et :

$$P(X = k)P(Y = k') = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-(1-p)\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^{k'}}{k'!} = e^{-p\lambda - (1-p)\lambda} \frac{\lambda^k p^k \lambda^{k'} (1-p)^{k'}}{k!k'!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+k'} p^k (1-p)^{k'}}{k!k'!}.$$

Donc, pour tout $(k, k') \in \mathbb{N}^2$, $P(X = k, Y = k') = P(X = k)P(Y = k')$, ce qui prouve que :

X et Y sont indépendantes.

5) On a :

$$\text{cov}(X, N) = \text{cov}(X, X + Y) = \text{cov}(X, X) + \text{cov}(X, Y) = V(X) + \text{cov}(X, Y).$$

Et comme X et Y sont indépendantes, $\text{cov}(X, Y) = 0$. Ainsi :

$$\text{cov}(X, N) = V(X) > 0$$

Exercice 8

1) Les colonnes de M sont $X_1 U, \dots, X_n U$, donc toutes proportionnelles à U . Alors, le rang de M vaut au plus 1.

Ainsi, les valeurs possibles de $\text{rg}(M)$ sont 0 et 1. De plus :

$$\text{rg}(M) = 0 \Leftrightarrow U = 0 \Leftrightarrow X_1 = \dots = X_n = 0.$$

Donc, comme les X_i sont des variables de Bernoulli de même paramètre p et mutuellement indépendantes :

$$P(\text{rg}(M) = 0) = P(X_1 = 0, \dots, X_n = 0) = P(X_1 = 0) \dots P(X_n = 0) = (1-p)^n.$$

Ainsi :

La variable $\text{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

Les coefficients diagonaux de M sont les X_i^2 , donc $Tr(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

Or, comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i = 0$ ou 1 , on a $X_i^2 = X_i$ et ainsi, $Tr(M) = \sum_{i=1}^n X_i$.

Enfin, la variable $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p , donc :

La variable $Tr(M)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .

2) Si M est une matrice de projection, alors $rg(M) = Tr(M)$. Comme $rg(M) = 0$ ou 1 , on obtient :

$$Tr(M) = \sum_{i=1}^n X_i = 0 \text{ ou } 1 \Leftrightarrow M = 0_n \text{ ou } E_{i,i}$$

où $E_{i,i}$ est la matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui au croisement de la colonne i et de la ligne i qui vaut 1 .

Réciproquement, si $M = 0_n$ ou $E_{i,i}$, alors on a immédiatement $M^2 = M$, donc M est une matrice de projection.

Ainsi, M est une matrice de projection si et seulement si $Tr(M) \leq 1$ et comme $Tr(M)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p , la probabilité d'un tel évènement est :

$$P(Tr(M) \leq 1) = P(Tr(M) = 0) + P(Tr(M) = 1) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.$$

Finalement :

La probabilité que M soit une matrice de projection est $(1 + (n-1)p)(1-p)^{n-1}$.

3) On a ici $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc ${}^tUV = X_1 + X_2$ (en identifiant $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}). Alors :

$$S = {}^tVMV = {}^tVU{}^tUV = ({}^tUV)UV = (X_1 + X_2)^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = X_1 + X_2 + 2X_1X_2$$

car $X_i = 0$ ou 1 , donc $X_i^2 = X_i$.

On a alors :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + 2E(X_1X_2) = E(X_1) + E(X_2) + 2E(X_1)E(X_2) = 2p + 2p^2.$$

Et :

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E((X_1 + X_2 + 2X_1X_2)^2) = E(X_1^2 + X_2^2 + 4X_1^2X_2^2 + 2X_1X_2 + 4X_1^2X_2 + 4X_1X_2^2) \\ &= E(X_1 + X_2 + 4X_1X_2 + 2X_1X_2 + 4X_1X_2 + 4X_1X_2) = E(X_1 + X_2 + 14X_1X_2) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + 14E(X_1X_2) = E(X_1) + E(X_2) + 14E(X_1)E(X_2) = 2p + 14p^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$V(S) = E(S^2) - E(S)^2 = 2p + 14p^2 - 4p^2(1+p)^2.$$

Finalement (après factorisation), on obtient :

$$E(S) = 2p(1+p) \text{ et } V(S) = 2p(1-p)(1+6p+2p^2).$$

Exercice 9

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 quand le jeton numéroté k appartient à la poignée piochée et 0 sinon. On a alors :

$$S = \sum_{k=1}^n k X_k .$$

Une poignée correspond à une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$, donc il y en a 2^n (y compris la poignée vide), dont 2^{n-1} contenant le jeton numéroté k (pour construire une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ contenant k , il suffit de choisir une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}$ et d'y ajouter k). Comme les poignées sont équiprobables, la probabilité d'avoir k dans la poignée piochée est $P(X_k = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$, et ceci quel que soit k . Alors, quel que soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$E(X_k) = P(X_k = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} .$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(S) = E\left(\sum_{k=1}^n k X_k\right) = \sum_{k=1}^n k E(X_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k .$$

Soit :

$$E(S) = \frac{n(n+1)}{4}$$

Exercice 10

1) On a $U = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 0 \\ Y & \text{si } X = 1 \end{cases}$ et $\Omega(Y) = \mathbb{N}^*$, donc $\Omega(U) = \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(U = k) = (X = 1) \cap (Y = k)$ et comme X et Y sont indépendantes :

$$P(U = k) = P(X = 1) \times P(Y = k) = p P(Y = k) .$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P(U = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p P(Y = k) = p E(Y) = \frac{p}{a} \\ E(U^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(U = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p P(Y = k) = p E(Y^2) = p \frac{2-a}{a^2} \\ V(U) &= E(U^2) - E(U)^2 = p \frac{2-a}{a^2} - \frac{p^2}{a^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E(U) = \frac{p}{a} \quad V(U) = \frac{p(2-a-p)}{a^2}$$

2) On a $V = \begin{cases} Y & \text{si } X = 0 \\ Z & \text{si } X = 1 \end{cases}$, $\Omega(Y) = \mathbb{N}^*$ et $\Omega(Z) = \mathbb{N}$, donc $\Omega(V) = \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(U = k) = [(X = 0) \cap (Y = k)] \cup [(X = 1) \cap (Z = k)]$.

Comme l'union est disjointe :

$$P(U = k) = P[(X = 0) \cap (Y = k)] + P[(X = 1) \cap (Z = k)].$$

Comme X , Y et Z sont deux à deux indépendantes :

$$P(U = k) = P(X = 0) \times P(Y = k) + P(X = 1) \times P(Z = k) = (1-p)P(Y = k) + pP(Z = k).$$

Alors :

$$E(V) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(V = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k [(1-p)P(Y = k) + pP(Z = k)]$$

$$= (1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Y = k) + p \sum_{k=1}^{+\infty} k P(Z = k) = (1-p)E(Y) + pE(Z) = (1-p) \frac{1}{a} + p\lambda$$

$$E(V^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(V = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 [(1-p)P(Y = k) + pP(Z = k)]$$

$$= (1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Y = k) + p \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Z = k) = (1-p)E(Y^2) + pE(Z^2) = (1-p) \frac{2-a}{a^2} + p(\lambda + \lambda^2)$$

$$V(V) = E(V^2) - E(V)^2 = (1-p) \frac{2-a}{a^2} + p(\lambda + \lambda^2) - \left((1-p) \frac{1}{a} + p\lambda \right)^2$$

D'où :

$$\boxed{E(V) = \frac{1-p}{a} + p\lambda \quad V(V) = \frac{(1-p)(1-a+p)}{a^2} + \left(1 + \lambda - p\lambda - \frac{2(1-p)}{a} \right) p\lambda}$$