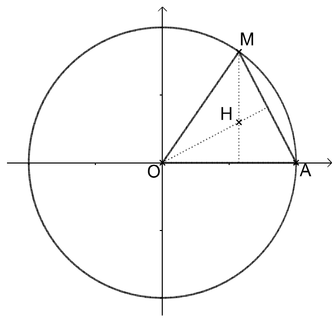
2) Quitte à modifier le repère, on peut supposer que O est le centre et A le point de coordonnées $(a\,;0)$.



Posons $t=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$, donc $M\left(a\cos t, a\sin t\right)$ et notons $H\left(x(t), y(t)\right)$ l'orthocentre de OAM.

Remarquons que si $M=A$ ou A' (où A' est le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$), le triangle est aplati et H n'est pas défini. Donc, on suppose $M\neq A$ et A', donc $t\neq 0\ [\pi]$ (et $\sin t\neq 0$).

On a alors :

- $(OH)\perp(AM)$ donc $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AM}=x(t)(a\cos t-a)+y(t)(a\sin t)=0$, soit : $x(t)\cos t+y(t)\sin t=x$.
- $(\mathrm{AH})\perp(\mathrm{OM})$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{OM}=(x(t)-a)\,a\cos t+y(t)\,a\sin t=0$, soit : $x(t)\cos t+y(t)\sin t=a\cos t$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t)\cos t+y(t)\sin t=x \\ x(t)\cos t+y(t)\sin t=a\cos t \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=\dfrac{a(1-\cos t)\cos t}{\sin t}\cdot \end{cases}$$

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

La courbe est entièrement décrite quand t décrit $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

Les fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont respectivement paire et impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $]0,\pi[$. Alors, pour tout $t\in\,]0,\pi[$, on a :

$$\begin{cases} x'(t)=-\,a\sin t \\ y'(t)=a(1-\cos t)\dfrac{\cos^2 t+\cos t-1}{\sin^2 t} \end{cases}$$

Le racines de X^2+X-1 sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}6$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1{,}6$.

En posant $t_0=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, on a :

$$y(t)=a\frac{1-\cos t}{\sin^2 t}\left(\cos t+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(\cos t-\cos t_0)\,.$$

On obtient le tableau :

t	0		t_0		π
$x'(t)$			$-$		
x	a		$\searrow$		$-a$
y	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

On a :

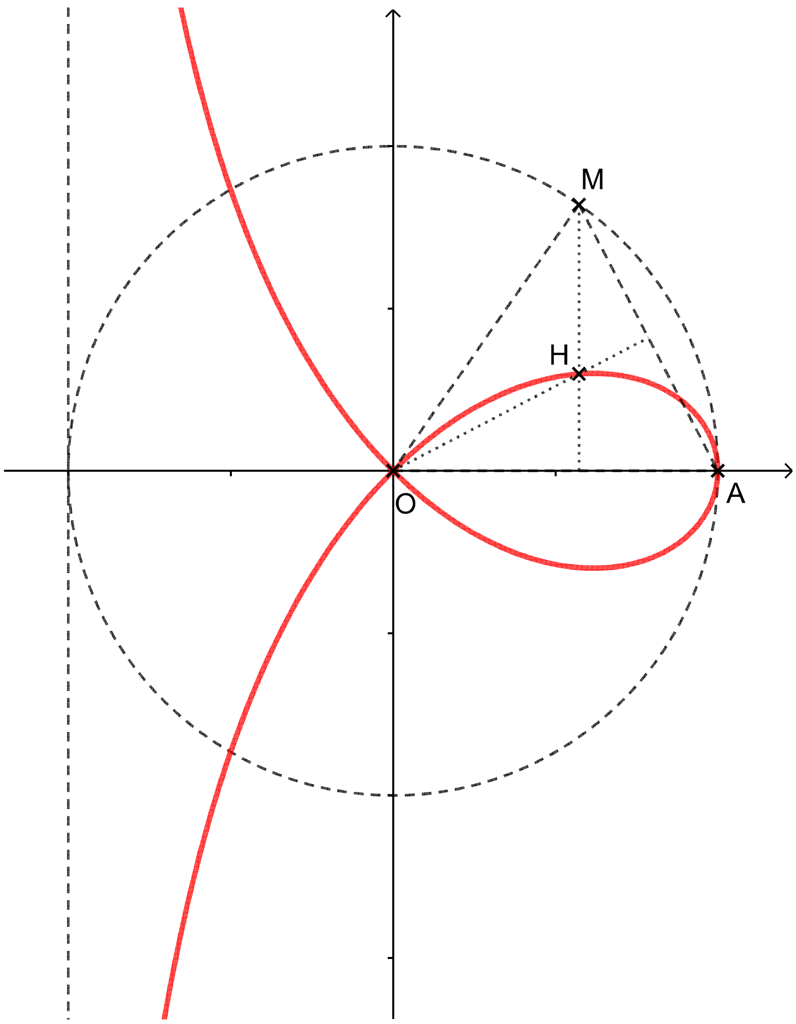
$$y(t) = a\cos t\,\frac{1-\cos t}{\sin t} = a\cos t\,\frac{t^2/2+\underset{0}{o}(t^2)}{t+\underset{0}{o}(t^2)} = a\cos t\,\frac{t/2+\underset{0}{o}(t)}{1+\underset{0}{o}(t)} \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to 0} y(t) = 0\,.$$

Comme $x(0)=a$, la courbe peut être prolongée au point $(a,0)$ quand $t\to 0$.

Enfin :

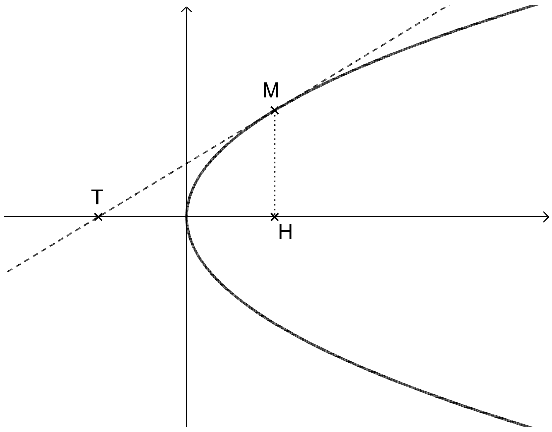
- En $t=0$, $x'(0)=0$ et $\lim_{t\to 0} y'(t) = a\lim_{t\to 0}\frac{t^2/2+\underset{0}{o}(t^2)}{t^2+\underset{0}{o}(t^2)} = \frac{a}{2}$: il y une tangente verticale.
- En $t=t_0$, il y une tangente horizontale.
- Quand $t\to\pi$, il y a une asymptote verticale d'équation $x=-a$.

On obtient la courbe (en rouge) :



Exercice 7

Pour fixer les idées, voici un schéma dans le cas où $\mathscr{C}$ est une parabole.



Notons $(x(t), y(t))$ les coordonnées de *M*, où *t* est un paramètre, décrivant un intervalle *I* de $\mathbb{R}$.

Comme $\mathscr{C}$ est régulière, les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables sur *I*, et x' et y' ne s'annulent pas en même temps.

La tangente à $\mathscr{C}$ en *M* a pour équation $(x - x(t))\, y'(t) - (y - y(t))\, x'(t) = 0$, donc x_T, l'abscisse de *T* (qui est d'ordonnée nulle), vérifie :

$$y'(t)x_T = x(t)\, y'(t) - y(t)x'(t).$$

De plus, pour que *T* soit défini de manière unique, il faut que la tangente ne soit pas horizontale, c'est-à-dire que $y'(t) \neq 0$ et dans ce cas, on obtient :

$$x_T = x(t) - \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)}.$$

Ainsi, $T\left(x(t) - \dfrac{y(t)x'(t)}{y'(t)} ; 0 \right)$. De plus, on a immédiatement $H\,(x(t) ; 0)$, donc :

$$HT = |x_T - x(t)| = \left| \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} \right|.$$

On a alors :

$$HT = a \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} \right| = a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} = \pm\, a\,.$$

Comme *x* et *y* sont de classe C^1 sur *I*, la fonction $t \mapsto \dfrac{y(t)x'(t)}{y'(t)}$ est continue, donc ne change de signe que quand elle s'annule. Or, $a \neq 0$, donc $t \mapsto \dfrac{y(t)x'(t)}{y'(t)}$ ne s'annule jamais sur *I*, et ainsi, on a :

$$\left(\forall\, t \in I,\ \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} = -\,a \right) \text{ ou } \left(\forall\, t \in I,\ \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} = a \right).$$

Remarquons que l'égalité $\left| \dfrac{y(t)x'(t)}{y'(t)} \right| = a \neq 0$ implique aussi que la fonction y ne s'annule pas sur *I* et comme elle est continue, elle garde un signe constant. On a alors :

$$\left(\forall\, t \in I,\ x'(t) = -\,a \frac{y'(t)}{y(t)} \right) \text{ ou } \left(\forall\, t \in I,\ x'(t) = a \frac{y'(t)}{y(t)} \right).$$

Soit :

$$\left(\forall\, t\in I,\ x(t)=-a\ln\left|y(t)\right|+c\right) \text{ ou } \left(\forall\, t\in I,\ x(t)=a\ln\left|y(t)\right|+c\right).$$

Ceci revient à :

$$\left(\forall\, t\in I,\ y(t)=K\,e^{-\frac{1}{a}x(t)}\right) \text{ ou } \left(\forall\, t\in I,\ y(t)=K\,e^{\frac{1}{a}x(t)}\right).$$

Les fonctions $x\mapsto e^{x/a}$ et $x\mapsto e^{-x/a}$ étant définies sur $\mathbb{R}$, on peut conclure que si $\mathscr{C}$ est solution, alors c'est la courbe représentative d'une fonction $x\mapsto K\,e^{x/a}$ ou $x\mapsto K\,e^{-x/a}$.

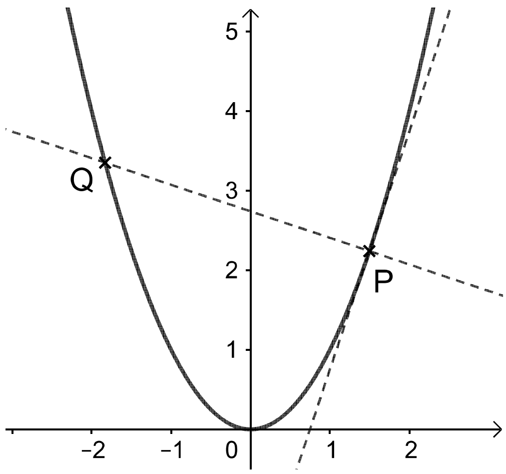
Réciproquement, si $\mathscr{C}$ est paramétrée par $x\mapsto\left(x, K\,e^{x/a}\right)$ avec $x\in\mathbb{R}$ pour paramètre, la courbe est régulière de classe C^1 et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $HT=\left|\dfrac{K\,e^{x/a}}{K\,e^{x/a}/a}\right|=a$, donc $\mathscr{C}$ est solution.

Il en va de même pour $x\mapsto\left(x, K\,e^{-x/a}\right)$ et finalement :

> Les courbes recherchées sont les courbes représentatives sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x\mapsto K\,e^{x/a}$ ou $x\mapsto K\,e^{-x/a}$ où *K* est une constante réelle.

Exercice 8

On a le schéma suivant :



La parabole $\mathscr{P}$ est paramétrée par $t\mapsto(t,t^2)$ avec $t\in\mathbb{R}$ et $P(t,t^2)$ une éventuelle solution du problème (avec $t\in\mathbb{R}^*$ car *P* est distinct de l'origine du repère).

Du fait de la symétrie de $\mathscr{P}$ par rapport à l'axe des ordonnées, le symétrique de *P* par rapport à l'axe des ordonnées est aussi solution. On peut donc supposer $t>0$.

Un vecteur directeur de la tangente à $\mathscr{P}$ en *P* est $\vec{u}(1,2t)$ et si on appelle $\mathscr{N}$ la normale à $\mathscr{P}$ en *P*, on a :

$$M(x,y)\in\mathscr{N} \iff \overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}=0 \iff x-t+2t(y-t^2)=0.$$

Comme $Q(x_Q,y_Q)\in\mathscr{P}\cap\mathscr{N}$ et $Q\neq P$, on a :

$$\begin{cases} x_Q-t+2t(y_Q-t^2)=0 \\ y_Q=x_Q^2 \\ x_Q\neq t \end{cases} \iff \begin{cases} x_Q-t+2t(x_Q^2-t^2)=0 \\ y_Q=x_Q^2 \\ x_Q\neq t \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2t(x_Q+t)=0 \\ y_Q=x_Q^2 \\ x_Q\neq t \end{cases} \iff \begin{cases} x_Q=-t-\dfrac{1}{2t} \\ y_Q=\left(t+\dfrac{1}{2t}\right)^2 \end{cases}$$

La longueur de l'arc $\widehat{PQ}$ de la parabole est alors donnée par :

$$L(t)=\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}\sqrt{1+4u^2}\,du=F(t)-F\left(-t-\frac{1}{2t}\right)$$

avec $F:t\mapsto\int_0^t\sqrt{1+4u^2}\,du$.

La fonction F est une primitive de $t\mapsto\sqrt{1+4t^2}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $t\mapsto -t-\dfrac{1}{2t}$ l'est aussi, L est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$L'(t)=F'(t)-\left(-1+\frac{1}{2t^2}\right)F'\left(-t-\frac{1}{2t}\right)=\sqrt{1+4t^2}+\frac{2t^2-1}{2t^2}\sqrt{1+4\left(-t-\frac{1}{2t}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+4t^2}+\frac{2t^2-1}{2t^3}\sqrt{4t^4+5t^2+1}=\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t^3}\left[2t^3+(2t^2-1)\sqrt{t^2+1}\right]$$

Si $2t^2-1\geq 0$, soit $t\geq\dfrac{1}{\sqrt2}$, alors $L'(t)>0$ et si $2t^2-1<0$, soit $0<t<\dfrac{1}{\sqrt2}$, on a :

$$L'(t)=\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t^3}\frac{(2t^3)^2-(2t^2-1)^2(t^2+1)}{2t^3-(2t^2-1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t^3}\frac{3t^2-1}{2t^3-(2t^2-1)\sqrt{t^2+1}}.$$

Et $L'(t)>0$ quand $3t^2-1>0$, soit $t>\dfrac{1}{\sqrt3}$.

Finalement, $L'(t)<0$ sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt3}\right[$ et $L'(t)>0$ sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt3}\,;+\infty\right[$, donc L est strictement décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt3}\right[$ et L est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt3}\,;+\infty\right[$. Ceci prouve que L admet un minimum en $t=\dfrac{1}{\sqrt3}$.

Dans ce cas, $P\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\,;\dfrac13\right)$ et

$$L\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)=\int_{-\frac{5}{2\sqrt3}}^{\frac{1}{\sqrt3}}\sqrt{1+4u^2}\,du\underset{u=\frac12\operatorname{sh}t}{=}\int_{\operatorname{argsh}\left(-\frac{5}{\sqrt3}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}\,\frac12\operatorname{ch}t\,dt=\frac12\int_{\operatorname{argsh}\left(-\frac{5}{\sqrt3}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)}\operatorname{ch}^2t\,dt$$

$$=\frac14\int_{-\operatorname{argsh}\left(\frac{5}{\sqrt3}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)}\left[1+\operatorname{ch}(2t)\right]dt=\left[t+\frac12\operatorname{sh}(2t)\right]_{-\operatorname{argsh}\left(\frac{5}{\sqrt3}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)}$$

$$=\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)+\operatorname{argsh}\left(\frac{5}{\sqrt3}\right)+\left[\frac{2}{\sqrt3}\sqrt{1+\left(\frac{2}{\sqrt3}\right)^2}+\frac{5}{\sqrt3}\sqrt{1+\left(\frac{5}{\sqrt3}\right)^2}\right]=\ln\left(8+3\sqrt7\right)+4\sqrt7$$

Finalement :

> L'arc de parabole est de longueur minimale en $P\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\,;\dfrac13\right)$ et $P\left(-\dfrac{1}{\sqrt3}\,;\dfrac13\right)$,
>
> et dans ce cas, cette longueur est $\ln\left(8+3\sqrt7\right)+4\sqrt7$.

Exercice 9

1) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $|f(t)|\geq 0$, donc $t\mapsto|f(t)|$ est croissante si et seulement si $t\mapsto|f(t)|^2$ l'est.

Or, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|^2=f(t)\overline{f}(t)$ et comme *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\overline{f}$ l'est aussi, ainsi que $g=f\,\overline{f}$ (en tant que produit de telles fonctions) et :

$$g'(t)=f'(t)\overline{f}(t)+f(t)\overline{f}'(t)=f'(t)\overline{f}(t)+\overline{f'(t)\overline{f}(t)}=2\operatorname{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right].$$

Comme *f* est à images dans $\mathbb{C}^*$, on a $|f(t)|^2>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc :

$$g'(t)=2\operatorname{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\operatorname{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]}{|f(t)|^2}\geq 0.$$

Enfin :

$$\frac{\operatorname{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]}{|f(t)|^2}=\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)\overline{f}(t)}{|f(t)|^2}\right]=\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)\overline{f}(t)}{f(t)\overline{f}(t)}\right]=\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right].$$

Et donc :

$$|f| \text{ est croissante} \quad\Leftrightarrow\quad g \text{ est croissante} \quad\Leftrightarrow\quad g'(t)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]\geq 0.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{t\mapsto|f(t)| \text{ est croissante si et seulement si la partie réelle } \frac{f'(t)}{f(t)} \text{ est toujours positive.}}$$

2) En gardant les notations de la question précédente ($g=|f|^2$), on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{g'(t)}{g(t)}=\frac{f'(t)\overline{f}(t)+f(t)\overline{f}'(t)}{f(t)\overline{f}(t)}=\frac{2\operatorname{Re}\left[f'(t)\overline{f}(t)\right]}{f(t)\overline{f}(t)}=2\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)\overline{f}(t)}{f(t)\overline{f}(t)}\right]=2\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right].$$

$\frac{g'(t)}{g(t)}-2a$ Or, si $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f'(t)}{f(t)}=a\in\mathbb{R}_-^*$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f'(t)}{f(t)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]+i\operatorname{Im}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]\right)=a \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]=a\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{Im}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]=0\end{cases}$$

Donc :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{g(t)}=2a.$$

Comme $-a>0$, il existe $A>0$ tel que pour tout $t\in[A,+\infty[$, $\left|\frac{g'(t)}{g(t)}-2a\right|\leq -a$, ce qui implique que :

$$\frac{g'(t)}{g(t)}\leq a.$$

Alors, comme *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, g l'est aussi et pour tout $t \in [A,+\infty[$:

$$\int_A^t \frac{g'(u)}{g(u)}du \leq \int_A^t a\,du \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big(g(t)\big)-\ln\big(g(A)\big)\leq a(t-A) \quad \Leftrightarrow \quad g(t)\leq K^2 e^{at} \quad \Leftrightarrow \quad \left|f(t)\right| \leq K e^{\frac{a}{2}t}$$

avec $K=\sqrt{e^{-aA}g(A)} \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n \geq N = E(A)+1$, $\left|f(n)\right| \leq K e^{\frac{a}{2}n} = K(e^{a/2})^n$.

Comme $a<0$, on a $e^{a/2} \in]0,1[$, donc la série géométrique $\sum K(e^{a/2})^n$ converge et ainsi, $\sum\left|f(n)\right|$ converge aussi, et finalement :

$$\boxed{\text{La série de terme général } f(n) \text{ est absolument convergente.}}$$

Exercice 10

1) La fonction $f: t \mapsto \big(a\cos t, b\sin t\big)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, donc la courbe est entièrement parcourue quand *t* décrit $[-\pi,\pi]$. On a alors $L=\int_{-\pi}^{\pi}\left\|f'(t)\right\|dt$.

Pour $t\in[-\pi,\pi]$, notons $M(t)$ le point de coordonnées $\big(a\cos t, b\sin t\big)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Pour tout $t\in[-\pi,\pi]$, $-t\in[-\pi,\pi]$ et $\big(a\cos(-t), b\sin(-t)\big)=\big(a\cos t, -b\sin t\big)$, donc $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et $\mathscr{E}$ est symétrique par rapport à (*Ox*).

Pour tout $t\in[0,\pi]$, $\pi-t\in[0,\pi]$ et $\big(a\cos(\pi-t), b\sin(\pi-t)\big)=\big(-a\cos t, b\sin t\big)$, donc $M(\pi-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et $\mathscr{E}$ est symétrique par rapport à (*Oy*).

Ainsi, $L=4\int_0^{\pi/2}\left\|f'(t)\right\|dt$, soit, $f': t\mapsto\big(-a\sin t, b\cos t\big)$:

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt + 4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt.$$

En posant $u=\dfrac{\pi}{2}-t$ dans la seconde intégrale, on obtient :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u}\,du.$$

Donc $L=4\int_0^{\pi/4}g(t)\,dt$ avec :

$$g(t)=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}+\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}.$$

La fonction g est définie et dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, avec pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{a^2\cos t\sin t - b^2\sin t\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}} + \frac{-a^2\sin t\cos t+b^2\cos t\sin t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\\
&= (a^2-b^2)\sin t\cos t\left(\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}-\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\right)\\
&= \frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}-\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)\\
&= \frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\,\frac{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t-a^2\sin^2 t-b^2\cos^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\\
&= \frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\,\frac{(a^2-b^2)(\cos^2 t-\sin^2 t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\\
&= \frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}}\,\frac{(a^2-b^2)\cos 2t}{\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\\
&= \frac{(a^2-b^2)^2\sin 4t}{4\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)}
\end{aligned}$$

Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\sin 4t\ge 0$, donc $g'(t)\ge 0$ et g est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Alors, pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $g(0)\le g(t)\le g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, soit :

$$a+b\le g(t)\le\sqrt{2(a^2+b^2)}\,.$$

On a alors $4\int_0^{\pi/4}(a+b)\,dt\le 4\int_0^{\pi/4}g(t)\,dt\le 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{2(a^2+b^2)}\,dt$, soit :

$$\boxed{\pi(a+b)\le L\le\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

2) On veut $L=2\pi a\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\left[\binom{2n}{n}\frac{e^n}{2^{2n}}\right]^2\right)$. On a :

$$L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(e\cos t)^2}\,dt\,.$$

Et $e^2=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\in\,]0,1[$, donc pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0<e\cos t<1$ et :

$$\sqrt{1-(e\cos t)^2}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(e\cos t)^{2n}\,.$$

De plus, pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, si $f_n(t)=\dfrac{1}{2n-1}\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}(e\cos t)^{2n}$, on a :

$$\left|f_n(t)\right|\le\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}.$$

Et la série $\sum\dfrac{1}{2n-1}\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}e^{2n}$ converge (avec $\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{1}{2n-1}\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}e^{2n}=1-\sqrt{1-e^2}$), donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(e\cos t)^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\left[1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(e\cos t)^{2n}\right]dt=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\int_0^{\pi/2}\cos^{2(n+1)}t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos t\cos^{2n+1}t\,dt=\left[\sin t\cos^{2n+1}t\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(2n+1)\sin^2 t\cos^{2n}t\,dt\\&=(2n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\cos^{2n}t\,dt=(2n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt-(2n+1)\int_0^{\pi/2}\cos^{2(n+1)}t\,dt\\&=(2n+1)I_n-(2n+1)I_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, $I_{n+1}=\dfrac{2n+1}{2n+2}I_n$ et $I_n=\dfrac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times2}I_0=\dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}\dfrac{\pi}{2}$.

Alors :

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(e\cos t)^2}\,dt=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{2n}\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}e^{n}\right]^2\right).$$

Et finalement :

$$\boxed{L=2\pi a\left(1-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\left[\binom{2n}{n}\frac{e^n}{2^{2n}}\right]^2\right)}$$

3) Du fait des symétries vues plus haut, l'aire A de la surface délimitée par $\mathscr{E}$ vaut 4 fois l'aire de la surface comprise entre (Ox), (Oy) et la partie de $\mathscr{E}$ située dans le quart de plan tel que $x\ge0$ et $y\ge0$.

Posons $x=a\cos t$ et $y=b\sin t$.

Pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ et $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$, donc $y=b\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$ et :

$$A=4\int_0^a b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx.$$

En posant $x=a\cos t$ (donc $dx=(-a\sin t)dt$), on obtient :

$$A=4\int_{\pi/2}^0 b\sqrt{1-\cos^2 t}(-a\sin t)dt=4ab\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\pi ab-2ab\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}.$$

Soit :

$$\boxed{A=\pi ab}$$